

Sobre la dinámica del sistema de Lamb con masa cero

Marco Antonio Taneco Hernández ¹

Resumen

Probamos la existencia de dinámica para el sistema de Lamb, el cual consiste de una ecuación de onda acoplada a la ecuación de movimiento de una partícula de masa $m = 0$ sujeta a un campo de fuerza no lineal. Tal sistema es no lineal conservativo y reversible con respecto al tiempo.

2010 Mathematics Subject Classification: 37K05, 35A05, 35A30.

Keywords and phrases: Ecuación de ondas, sistema conservativo, función hamiltoniana, descomposición de D'Alembert distribucional.

1. Introducción

En muchas ecuaciones en derivadas parciales lineales y no lineales es muy útil observar su dinámica en términos de sus componentes considerándolas como partículas. La descomposición de este tipo de ecuaciones nos permite obtener una descripción equivalente en términos de dos subsistemas: el primero es de dimensión finita y es responsable del comportamiento, como partícula (o estado ligado) de una parte de la solución; el segundo es de dimensión infinita y dispersivo. Los términos de acoplamiento son los responsables de cómo la dinámica de la solución, vista como partícula, influye en el campo (o medio) y cómo el campo de ondas dispersivo influye en la dinámica de la solución, vista como partícula (véase [20] para detalles más precisos).

¹Este artículo es parte de la investigación doctoral que el autor realizó bajo la supervisión del Dr. Anatoli E. Merzon en el Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH, dentro del programa de posgrado Conjunto UMSNH-UNAM. El trabajo contó con el apoyo financiero del CONACyT.

El sistema de Lamb fue el primer modelo físico, introducido por H. Lamb (1900), que describe la radiación amortiguada (fenómeno que proviene de la electrodinámica clásica [9]). Dicho sistema está compuesto por un oscilador que se encuentra acoplado a una cuerda de longitud semi-infinita y Lamb lo usó para describir oscilaciones (vibraciones) de un núcleo en un medio extendido. El oscilador transfiere energía a la cuerda generando ondas que se propagan a lo largo de esta. El modelo de Lamb representa también un ejemplo de un sistema en el que existen transiciones entre sus estados estacionarios [14].

Si la fuerza externa es lineal: $F(y) = -\omega^2 y$, $\omega > 0$, H. Lamb [18], fue el primero en estudiar el sistema para explicar aspectos de las soluciones en un dominio infinito. Si la fuerza externa es no lineal y la masa de la partícula es $m \geq 0$, Keller y Bonilla [10] investigaron tal modelo para analizar interrogantes sobre la irreversibilidad y no recurrencia. En [11, 13, 15] A. Komech estudia el sistema de Lamb demostrando por primera vez la existencia de un atractor global minimal y en [7] se estudian regímenes meta estables, para un sistema de Lamb estocástico.

La existencia de una dinámica del sistema de Lamb, para el caso $m \geq 0$ con datos iniciales con soporte compacto, fue tratada en [11, 12, 13], y en [15] se presentan generalizaciones de los artículos anteriores. En el presente artículo se considera el caso $m = 0$ y datos iniciales más arbitrarios, empleando los mismos métodos pero realizando las pruebas completas y simplificando argumentos.

Otros trabajos relacionados con este tópico de investigación para sistemas tipo Lamb son los siguientes: los métodos y resultados de [14, 13, 15] se aplicaron y extendieron para tratar el problema del análisis de estabilidad e inestabilidad en algunos sistemas lineales de tipo Lamb [5]. El artículo [4] usa la teoría de dispersión de Lax-Phillips en modelos lineales de tipo Lamb y establece la existencia de una dinámica para cierta clase de sistemas no lineales. En [12] se estudia un sistema de ecuaciones del tipo (1) que modela el caso de una cuerda infinita acoplada a un número finito N de osciladores no lineales los cuales afectan a N partículas de masas $m_i = 0$, $i = 1, \dots, N$ atadas a la cuerda, aquí solo se demuestra la existencia de un atractor minimal asociado a tal modelo.

En todos los artículos anteriores el sistema de Lamb es citado como el ejemplo más simple no trivial de un sistema no lineal conservativo reversible con respecto al tiempo que permite analizar diversas interrogantes. En [19] se demuestra, por primera vez para el caso $m = 0$, que todas las soluciones de energía finita del sistema de Lamb convergen a

un atractor global con respecto a la norma de energía local y se descubre el carácter de la convergencia, es decir, se describe la asintótica de cada solución de energía finita cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Y en [16] se hace lo mismo para el caso $m > 0$.

2. El sistema de Lamb

Consideremos el sistema acoplado

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \ddot{u}(x, t) = u''(x, t), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0 = F(y(t)) + u'(0+, t) - u'(0-, t); \\ y(t) := u(0, t), \end{array} \right. \quad \left| \quad t \in \mathbb{R}, \right.$$

en donde, $\dot{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ y así sucesivamente para las derivadas de orden 2. Las soluciones $u(x, t)$ toman valores en \mathbb{R}^d con $d \geq 1$. En todo el artículo las derivadas se entenderán en el sentido de distribuciones [22] a menos que se especifique lo contrario.

Físicamente (en dimensión $d = 1$) el sistema (1) describe pequeñas oscilaciones transversales de una cuerda de longitud infinita que se encuentra estirada paralelamente al eje \mathbb{R}_x ; una partícula de masa $m = 0$ es atada a la cuerda en el punto $x = 0$; la fuerza externa $F(y)$ es un campo vectorial no lineal, perpendicular a \mathbb{R}_x que actúa sobre la partícula (ver Figura 1). En dimensiones $d \geq 2$, el modelo de Lamb constituye

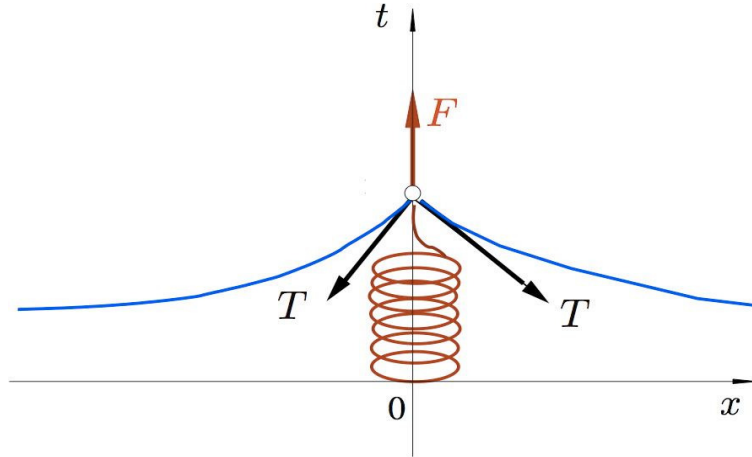


Figura 1: Cuerda infinita acoplada a un oscilador.

un sistema de d ecuaciones escalares y podría modelar la interacción

de d cuerdas que interactúan con un oscilador no lineal. El caso escalar complejo corresponde a $d = 2$.

Si la dimensión de la variable espacial x es $n = 2$ el sistema de Lamb podría usarse como un modelo simple para estudiar terremotos.

Observación 2.1. 1. La segunda ecuación exhibe que la derivada de la solución del problema (1) en los puntos $(0, t)$, en general, es discontinua (si $F(y) \neq 0$) (veáse Figura. 1.1). Esto significa, en particular, que si $u(x, 0) \in C^\infty(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ y $F(u(0, t)) \neq 0$, entonces la segunda ecuación no se cumple en el punto $t = 0$. Por lo tanto, no debemos entender esta ecuación en el sentido “puntual”. En la Observación 6.2.4 precisaremos el sentido de la segunda ecuación de (1).

2. El sistema (1) es formalmente equivalente a una ecuación de onda no lineal d -dimensional cuyo término no lineal, concentrado en el punto $x = 0$, tiene la forma $\delta(x)F(u)$, a saber:

$$(2) \quad \ddot{u}(x, t) = u''(x, t) + \delta(x)F(u(x, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Es importante hacer notar que tal equivalencia es solo formal.

3. El sistema (1) es reversible formalmente, es decir, no cambia su forma después de hacer el cambio de variable $t \mapsto -t$. En efecto, consideremos $u_1(x, t) := u(x, -t)$. Obviamente $\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, -t)$ y $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_1(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, -t)$. Entonces, la primera ecuación para u_1 en (1) se cumple formalmente. Además $u'_1(0+, t) = u'(0+, -t)$ y $u'_1(0-, t) = u'(0-, -t)$. Ya que $y(t) = u(0, t)$, entonces $y(-t) = u(0, -t) = u_1(0, t)$. De esta forma por la segunda ecuación de (1)

$$\begin{aligned} F(u_1(0, t)) + u'_1(0+, t) - u'_1(0-, t) \\ &= F(y(-t)) + u'(0+, -t) - u'(0-, -t) \\ &\stackrel{-t \rightarrow \zeta}{=} F(y(\zeta)) + u'(0+, \zeta) - u'(0-, \zeta) = 0. \end{aligned}$$

Esto significa que también la segunda ecuación para u_1 en (1) se cumple formalmente. Notemos que todavía no precisamos el sentido de esta ecuación. Entonces el sistema de Lamb (1) es reversible.

3. El problema de Cauchy

Consideremos el sistema (1) junto con las condiciones iniciales

$$(3) \quad u(x, t)|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}(x, t)|_{t=0} := v(x, t)|_{t=0} = v_0(x).$$

Definimos

$$(4) \quad \begin{aligned} Y(t) &:= \left(u(x, t), v(x, t) \right), \quad Y_0 := \left(u_0(x), v_0(x) \right), \\ \mathcal{V}(Y(t)) &= \left(v(x, t), u''(x, t) + \delta(x)F(u(x, t)) \right). \end{aligned}$$

Entonces, el problema de Cauchy (1), (3) como un sistema dinámico se escribe como

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{Y}(t) = \mathcal{V}(Y(t)), & t \in \mathbb{R} \\ Y(0) = Y_0. \end{cases}$$

En efecto, el sistema acoplado (2) (el cual es formalmente equivalente a (1)) puede escribirse como el sistema de ecuaciones

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{u}(x, t) &= v(x, t), \\ \dot{v}(x, t) &= u''(x, t) + \delta(x)F(u(x, t)). \end{aligned}$$

Observación 3.1. Notemos que $u''(x, t)$ en (6) tiene sentido como la derivada en el sentido de Sobolev [6]. En efecto, podemos definir para $u_1 \in \mathcal{E}_1 := C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d) \cap \{u_1 \mid u_1 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)\}$

$$\langle u''(x, \cdot), u_1(x) \rangle = -\langle u'(x, \cdot), u_1'(x) \rangle = -\int_{\mathbb{R}} u'(x, \cdot) u_1'(x) dx$$

y lo último tiene sentido ya que u' y u_1' pertenecen a $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Si convenimos en tratar a la segunda derivada en este sentido entonces se puede demostrar que el sistema (6) es formalmente hamiltoniano (véase [21]).

4. Espacio de fases y estructura hamiltoniana del sistema de Lamb

En esta sección vamos a introducir el espacio de fases \mathcal{E} de los estados con energía finita para el sistema (1). Denotaremos por $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_R$ la norma en los espacios de Hilbert $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y $L^2(I_R; \mathbb{R}^d)$, respectivamente, en donde $I_R := (-R, R) \subset \mathbb{R}$, generados por los productos escalares: $\langle f(x), g(x) \rangle_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot g(x) dx$, en donde, $a \cdot b :=$

$$\sum_{i=1}^d a_i b_i, \text{ para } a, b \in \mathbb{R}^d. \text{ Similarmente se define } \langle f(x), g(x) \rangle_{L^2(I_R; \mathbb{R}^d)}. \text{ Y } |a| := \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_d^2}.$$

Definición 4.1 (Los espacios de fases \mathcal{E} y \mathcal{E}_R). 1. El símbolo \mathcal{E} denotará a el espacio de Hilbert de las parejas $(u(x), v(x)) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ con $u'(x) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y la norma de energía global

$$(7) \quad \|(u, v)\|_{\mathcal{E}} := \|u'\| + |u(0)| + \|v\|.$$

2. El símbolo \mathcal{E}_F denotará a el espacio lineal \mathcal{E} dotado con la topología generada por la familia de semi normas de energía local

$$(8) \quad \|(u, v)\|_{\mathcal{E}_R} := \|u'\|_R + |u(0)| + \|v\|_R, \quad R > 0.$$

3. $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{E}_F} Y$ si y sólo si $\|Y_n - Y\|_{\mathcal{E}_R} \rightarrow 0$, para todo $R > 0$.

Observación 4.2. 1. Notemos que la derivada u' en la definición anterior se entiende en el sentido generalizado $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Ya que $u'(x) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, entonces $u'(x)$ existe, salvo un conjunto de medida cero, y como distribución coincide con la derivada generalizada, véase por ejemplo [17, página 15].

2. El espacio \mathcal{E}_F es un espacio metrizable, ya que la topología en \mathcal{E}_F se determina por la familia numerable de semi normas $\|\cdot\|_n$, $n \in \mathbb{N}$, pero no completo y por lo tanto no es un espacio de Fréchet.

Carácter conservativo de la fuerza no lineal

Denotaremos por $V(y) = -\int F(y)dy$ a la energía potencial del campo vectorial externo. Supongamos que $F(y) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ proviene de una función potencial real $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C^2$:

$$(9) \quad F(u) \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), \quad F(u) = -\nabla V(u), \quad u \in \mathbb{R}^d,$$

$$(10) \quad V(u) \xrightarrow{|u| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

La condición (10) implica que existe una constante $V_0 \in \mathbb{R}$ de tal manera que

$$(11) \quad V(u) \geq V_0, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

En la Figura 2 mostramos un ejemplo para la fuerza externa F con energía potencial V en el caso $d = 1$:

$$F(u) = u - u^3, \quad V(u) = \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2, \quad u \in \mathbb{R}.$$

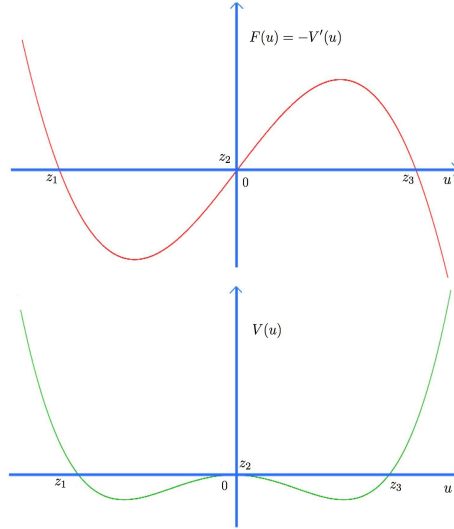


Figura 2: Ejemplo de una fuerza consevativa

Proposición 4.3. [21, Proposición 1.5, Capítulo 1] Bajo las suposiciones (9), (10), el sistema (2) es formalmente un sistema hamiltoniano en el espacio de fases \mathcal{E} con funcional hamiltoniana (energía total)

$$(12) \quad \mathcal{H}(u, v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[|v(x)|^2 + |u'(x)|^2 \right] dx + V(u(0)),$$

para $(u, v) \in \mathcal{E}$.

La idea para mostrar la proposición anterior es verificar que \mathcal{H} satisface las ecuaciones de Hamilton para las funciones (campos) $u(x)$ y $v(x)$.

En la siguiente sección enunciamos el teorema principal del artículo, el cual describe todas las soluciones del sistema de Lamb (1) que pertenecen a \mathcal{E} , y muestra que existe una cantidad suficiente de ellas.

5. Construcción de la dinámica del sistema de Lamb (5)

En el siguiente resultado describe la dinámica del sistema acoplado (1). El caso $m \geq 0$ esta considerado en [13] para condiciones iniciales más particulares.

Teorema 5.1 (Principal). [19, 21] *Supongamos que $m = 0$ y que se satisfacen las condiciones (9), (10). Entonces,*

1. *(Existencia, unicidad y continuidad de $Y(t)$) Para cada $Y_0 \in \mathcal{E}$ el problema de Cauchy (5) admite una solución única $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$.*
2. *La transformación $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ es continua en \mathcal{E} y en \mathcal{E}_F .*
3. *La energía del sistema de Lamb (5) se conserva*

$$(13) \quad \mathcal{H}(Y(t)) = \mathcal{H}(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = \text{const}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (u, v) \in \mathcal{E}.$$

en donde, \mathcal{H} se define como en (12).

4. *Se cumple la siguiente cota a priori*

$$(14) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|Y(t)\|_{\mathcal{E}} < \infty.$$

Dedicaremos lo que resta del presente artículo a demostrar el teorema anterior. Con el objeto de demostrar la existencia y unicidad de soluciones para el sistema acoplado (1), es necesario obtener la descomposición de D' Alembert para la ecuación de onda

$$\square u(x, t) := \ddot{u}(x, t) - u''(x, t) = 0$$

en la clase de distribuciones $\mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$, en donde Π_{\pm} son los semiplanos derecho e izquierdo en el plano (x, y) . Mencionamos que dicha descomposición es análoga a la bien conocida descomposición de D' Alembert en $C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ (véase por ejemplo, [22, página 201]). En el Apéndice resumimos las principales construcciones.

6. Unicidad de la solución del sistema de Lamb

En esta parte probaremos el primer punto de la Teorema 5.1. Es decir, demostraremos la existencia y unicidad de una solución $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$, para cada estado inicial $Y_0 \in \mathcal{E}$, del sistema (1); en la sección 7 probaremos la continuidad de la misma. Estableceremos la unicidad de la solución $Y(t) = (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t), \dot{y}(t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ suponiendo que tal solución existe. Al mismo tiempo, obtendremos un método para construir una solución. De esta forma estaremos probando también la existencia. En virtud del Teorema A.4 tenemos

Teorema 6.1. Para $u \in \mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$ las aseveraciones 1 y 2 son equivalentes

1. $\ddot{u}(x, t) - u''(x, t) = 0$, $(x, t) \in \Pi_- \cup \Pi_+$.
2. Existen $f_{\pm}, g_{\pm} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tales que la distribución u satisface la descomposición de D'Alembert

$$(15) \quad u(x, t) = \begin{cases} f_+(x-t) + g_+(x+t), & x > 0, \\ f_-(x-t) + g_-(x+t), & x < 0, \end{cases} \Big| t \in \mathbb{R}.$$

3. Si $u(x, t)$ admite otra representación del tipo (15) con $\bar{f}_{\pm}, \bar{g}_{\pm} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, entonces existen C_{\pm} tales que se cumple

$$(16) \quad \bar{f}_{\pm} = f_{\pm} - C_{\pm}, \quad \bar{g}_{\pm} = g_{\pm} + C_{\pm}.$$

6.1. Análisis de las propiedades de las soluciones del sistema de Lamb a partir de la existencia de su dinámica

El siguiente resultado nos dice que la continuidad de la solución $u(x, t)$ se sigue a partir de la continuidad de la dinámica de $Y(t)$ (suponiendo que ésta existe).

Proposición 6.1.1. [21, Proposición 3.3, Capítulo 2]

Si $Y(t) = (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t)) \in C(\mathbb{R}_t; \mathcal{E})$ entonces $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$.

Corolario 6.1.2. Bajo las suposiciones de la proposición anterior la siguiente función es continua

$$(17) \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto u(\cdot, t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d).$$

Ahora podemos decir que si $u(x, t)$ satisface el sistema de Lamb y la dinámica es continua, entonces las funciones f_{\pm}, g_{\pm} que aparecen en el desarrollo de D'Alembert (15) son continuas:

Corolario 6.1.3. Si $u(x, t) \in \mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$ es la solución del problema de Lamb (1) y la dinámica $Y(t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathcal{E})$, entonces las funciones f_{\pm}, g_{\pm} que están presentes en (15) son continuas.

El siguiente lema tiene carácter técnico y se usa en la siguiente subsección para el estudio de las funciones $\dot{u}(x, t)$ y $u'(x, t)$. La prueba de este resultado usa esencialmente la continuidad de $v(\cdot, t)$ como función de t , la continuidad de la norma $\|\cdot\|_{L^2([x_1, x_2]; \mathbb{R}^d)}$ y el teorema de Fubini [1].

Lema 6.1.4. *Sea $v(\cdot, t) : \mathbb{R}_t \rightarrow L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ continua. Entonces, $v(x, t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$.*

A continuación explicaremos el sentido del problema de Cauchy que define el sistema de Lamb.

6.2. Disertación del problema de Cauchy

Estamos interesado en soluciones $u(x, t)$ del problema de Cauchy (1), (3) tales que

$$(18) \quad Y(t) = (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E}).$$

Vamos a precisar la definición de los datos de Cauchy (3) para soluciones $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$. La función $u(x, t)$ satisface la ecuación de D'Alembert (primera ecuación de (1)). Por lo tanto, el Teorema 6.1 implica el desarrollo (15) para algunas funciones f_{\pm}, g_{\pm} . Fijemos estas funciones a partir de ahora. Ahora, ya que $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$, entonces $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$ por Proposición 6.1.1 y $f_{\pm}, g_{\pm} \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por el Corolario 6.1.3. Por lo tanto podemos ahora sustituir $t = 0$ en el desarrollo (15) y obtener,

$$(19) \quad u_0(x) = u(x, 0) = \begin{cases} f_+(x) + g_+(x), & x > 0 \\ f_-(x) + g_-(x), & x < 0. \end{cases}$$

Ahora derivando (15) con respecto a t y a x en el sentido de $\mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$ obtenemos

$$(20) \quad \dot{u}(x, t) = \begin{cases} -f'_+(x-t) + g'_+(x+t), & x > 0 \\ -f'_-(x-t) + g'_-(x+t), & x < 0 \end{cases} \Big|_{t \in \mathbb{R}}.$$

$$(21) \quad u'(x, t) = \begin{cases} f'_+(x-t) + g'_+(x+t), & x > 0 \\ f'_-(x-t) + g'_-(x+t), & x < 0 \end{cases} \Big|_{t \in \mathbb{R}}.$$

Por definición del espacio \mathcal{E} (véase Definición 4.1) tenemos que las funciones $\dot{u}(\cdot, t), u'(\cdot, t) : \mathbb{R}_t \rightarrow L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{R}^d)$ son continuas, luego podemos aplicar el Lema 6.1.4 con $v = \dot{u}$ y $v = u'$ para obtener

$$(22) \quad \dot{u}(x, t), u'(x, t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d).$$

Esto implica, por el Corolario A.6, *ii*)

$$(23) \quad f'_{\pm}(\xi), g'_{\pm}(\eta) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d).$$

Notemos que las partes derechas en (20) y (21) admiten restricciones sobre las rectas $t = b$ y $x = a$ respectivamente en el siguiente sentido:

Definición 6.2.1. Sea $h(\xi) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^d)$. Consideremos la función de dos variables $h(x-t)$. Definimos la restricción de $h(x-t)$ a la línea $t=b$ como la función $h(x-b)$.

Afirmamos que $h(x-b)$ realmente es una restricción en el sentido que $h(x-t) \xrightarrow[t \rightarrow b]{} h(x-b)$, en $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Esto se sigue de un teorema conocido (véase por ejemplo [3, páginas 255-257]). Ahora dado que se cumple (23), podemos tomar las restricciones de $\dot{u}(x,t)$ a la línea $t=0$ usando (20). Esto nos permite enunciar las siguientes definiciones:

Definición 6.2.2. Para $u(x,t) \in \mathcal{E}$ que satisface la primera ecuación de (1), colocamos

$$(24) \quad v_0(x) := \dot{u}(x,0) = \begin{cases} -f'_+(x) + g'_+(x), & x > 0 \\ -f'_-(x) + g'_-(x), & x < 0, \end{cases}$$

con $\dot{u}(x,0) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Notemos que por Teorema 6.1 inciso 3 $v_0(x)$ no depende de la elección de f_\pm, g_\pm en (15). Análogamente la siguiente definición da sentido a la segunda ecuación del sistema de Lamb (1).

Definición 6.2.3. En la segunda ecuación de (1), definimos

$$(25) \quad u'(0\pm, t) := f'_\pm(-t) + g'_\pm(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observación 6.2.4. 1. Ahora podemos precisar el sentido de la segunda ecuación de (1). La Definición 6.2.3 y (23) implican que

$$u'(0+, t), u'(0-, t) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d).$$

Esto nos permite entender a la segunda ecuación de (1) en el sentido $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$ (y no puntualmente ver Observación 2.1).

2. En esta forma precisamos el sentido de los datos de Cauchy (3).

6.3. Expresión de la solución del sistema de Lamb abajo de las características

A continuación expresamos las funciones de la descomposición de D'Alembert en términos de los datos iniciales.

Lema 6.3.1. *Sea $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$. Si u es una solución del sistema acoplado (1) y satisface las condiciones iniciales (3), entonces existen $C_{\pm} \in \mathbb{R}$ tal que*

$$(26) \quad \begin{aligned} f_{\pm}(z) &= \frac{1}{2}u_0(z) - \frac{1}{2} \int_0^z v_0(\chi) d\chi + C_{\pm}, \quad \pm z > 0 \\ g_{\pm}(z) &= \frac{1}{2}u_0(z) + \frac{1}{2} \int_0^z v_0(\chi) d\chi - C_{\pm}, \quad \pm z > 0. \end{aligned}$$

Nota 6.3.2. A pesar de que $f_+(z) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, la primera fórmula de (26) se cumple únicamente para $z > 0$. Para $z < 0$ aún no hemos definido la forma de $f_+(z)$ (en la subsección 6.4 se definirá). Comentarios similares se pueden hacer para g_+ , g_- y f_- .

Observación 6.3.3. 1. Vamos a cambiar las funciones f_{\pm}, g_{\pm} fijadas al inicio de la subsección por

$$(27) \quad \overline{f_{\pm}} = f_{\pm} - C_{\pm}, \quad \overline{g_{\pm}} = g_{\pm} + C_{\pm}.$$

Claro que el desarrollo (15) con estas funciones se sigue cumpliendo así como también las fórmulas (26). Por lo tanto, podemos asumir en lo sucesivo que

$$(28) \quad C_{\pm} = 0.$$

2. Notemos que a partir de la expresión (26), el hecho que $(u_0, v_0) \in \mathcal{E}$ y la definición de \mathcal{E} , tenemos que

$$(29) \quad f'_{\pm}(z), g'_{\pm}(z) \in L^2(\mathbb{R}_{\pm}; \mathbb{R}^d),$$

$$(30) \quad f_{\pm}(z), g_{\pm}(z) \in C(\overline{\mathbb{R}_{\pm}}; \mathbb{R}^d)$$

en donde, $\mathbb{R}_{\pm} \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid \pm x > 0\}$.

La solución del problema de Lamb es única bajo las características y se expresa por las fórmulas de D'Alembert por medio de los datos iniciales:

Proposición 6.3.4. *La fórmula usual de D'Alembert es válida en la región $|x| \geq |t|$:*

$$(31) \quad u(x, t) = \frac{1}{2}[u_0(x-t) + u_0(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(\chi) d\chi, \quad |x| \geq |t|.$$

Demostración. De (26) (recordando que ahora $C_{\pm} = 0$) se siguen las ecuaciones:

$$(32) \quad \frac{1}{2}u_0(x-t) - \frac{1}{2} \int_0^{x-t} v_0(\chi) d\chi = \begin{cases} f_+(x-t), & x-t \geq 0; \\ f_-(x-t), & x-t \leq 0. \end{cases}$$

$$(33) \quad \frac{1}{2}u_0(x+t) + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} v_0(\chi) d\chi = \begin{cases} g_+(x+t), & x+t \geq 0; \\ g_-(x+t), & x+t \leq 0. \end{cases}$$

Luego, sumando se tiene

$$\frac{1}{2}[u_0(x-t) + u_0(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(\chi) d\chi = \begin{cases} f_+(x-t) + g_+(x+t), & x \geq |t|; \\ f_-(x-t) + g_-(x+t), & -x \geq |t|. \end{cases}$$

La fórmula de D' Alembert (31) se sigue de las ecuaciones anteriores y la descomposición (15). \square

Corolario 6.3.5. *La solución del problema de Lamb $u(x, t)$ por abajo de las características es única y se expresa por las fórmulas de D' Alembert (31).*

En la siguiente subsección damos una expresión para la solución $u(x, t)$ en la región $|x| < |t|$.

6.4. Expresión de la solución a el sistema de Lamb en la región $|x| < |t|$. La ecuación reducida

Mostraremos la unicidad de la solución $u(x, t)$ en la región $|x| < |t|$. Consideraremos el caso $t > 0$, para $t < 0$ se procede de manera similar. Para tal fin construimos una ecuación diferencial ordinaria no-lineal que nos permitirá efectuar la demostración de la unicidad en dicha región. Para construir la solución $u(x, t)$ en la región $|x| < t$ usaremos la descomposición de D' Alembert (6.1). Notemos que para $x > 0$ la función $g_+(x+t)$ es conocida para $t > 0$ por (33), en cambio la función $f_+(x-t)$ es desconocida para $0 < x < t$. De manera similar la función $f_-(x-t)$ es conocida para $x < 0$ y $t > 0$ por (32), pero $g_-(x+t)$ es una función desconocida para $-t < x < 0$. Por lo tanto, tendremos que encontrar las funciones $f_+(z)$ para $z < 0$ y $g_-(z)$ para $z > 0$. Para

hallar esas funciones desconocidas, deduciremos una ecuación diferencial ordinaria no-lineal para

$$(34) \quad y(t) := u(0, t).$$

Primero, las condiciones iniciales (3) implican que

$$(35) \quad y(0) = u_0(0),$$

ya que $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$ por Proposición 6.1.1. Luego introduciendo la función $y(t) = u(0, t)$, obtenemos que $y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por continuidad de $u(x, t)$.

Lema 6.4.1. *Para cada solución $Y(t) = (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t)) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ del sistema (5) la función $y(t) := u(0, t)$ es una solución de las ecuaciones reducidas en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$*

$$(36) \quad 0 = F(y(t)) - 2\dot{y}(t) + 2\dot{w}_{in}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$(37) \quad 0 = F(y(t)) + 2\dot{y}(t) - 2\dot{w}_{out}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

en donde, la función $w_{in}(t)$ es la suma de las ondas incidentes (para t positivos) en el punto $x = 0$:

$$(38) \quad w_{in}(t) := g_+(t) + f_-(-t), \quad t \in \mathbb{R}$$

y $w_{out}(t)$ es la suma de las ondas reflejadas (para t negativos) en el punto $x = 0$:

$$(39) \quad w_{out}(t) := g_-(t) + f_+(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Además, se cumple

$$(40) \quad \dot{w}_{in}(t) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \quad \dot{w}_{out}(t) \in L^2(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d).$$

Demostración. Mostremos que la trayectoria $y(t)$ satisface la primera ecuación. La descomposición (15) y el hecho que $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$ implica

$$(41) \quad \begin{aligned} y(\tau) &:= u(0+, \tau) = u(0-, \tau) = f_+(-\tau) + g_+(\tau) \\ &= f_-(-\tau) + g_-(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Diferenciando en el sentido $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ obtenemos

$$(42) \quad y'(\tau) = -f'_+(-\tau) + g'_+(\tau) = -f'_-(-\tau) + g'_-(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Luego por (23) obtenemos que $y'(\tau) \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Expresamos las ondas reflejadas en términos de las ondas incidentes y de la trayectoria $y(t)$. Las igualdades (41) implican

$$(43) \quad f_+(-\tau) = y(\tau) - g_+(\tau), \quad g_-(\tau) = y(\tau) - f_-(-\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Esto implica

$$(44) \quad \left. \begin{aligned} f_+(x-t) &= y(t-x) - g_+(t-x), \\ g_-(x+t) &= y(t+x) - f_-(-t-x). \end{aligned} \right| x, t \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo f_+ y g_- de las ecuaciones anteriores en (15) obtenemos

$$(45) \quad u(x, t) = \begin{cases} y(t-x) - g_+(t-x) + g_+(x+t), & x > 0, \\ y(t+x) - f_-(-t-x) + f_-(x-t), & x < 0, \end{cases} \quad \left| t \in \mathbb{R}.$$

Derivando (43) en el sentido $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tenemos

$$f'_+(-t) = -y'(t) + g'_+(t), \quad g'_-(t) = y'(t) + f'_-(-t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luego en virtud de la Definición 6.2.3 obtenemos

$$u'(0+, t) = -\dot{y}(t) + 2g'_+(t), \quad u'(0-, t) = \dot{y}(t) + 2f'_-(-t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la segunda ecuación del sistema (1), obtenemos

$$0 = F(y(t)) - 2\dot{y}(t) + 2(g'_+(t) - f'_-(-t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la ecuación reducida (36) se sigue de la definición de w_{in} (38). Finalmente, (40) se obtiene de (38) y (29).

Por último mostremos que $y(t)$ satisface la ecuación (37). Expresamos las ondas incidentes g_+ y f_- en términos de las ondas reflejadas y la trayectoria $y(t)$. De (41) tenemos

$$(46) \quad g_+(\tau) = y(\tau) - f_+(-\tau), \quad f_-(-\tau) = y(\tau) - g_-(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Esto implica

$$(47) \quad \left. \begin{aligned} g_+(x+t) &= y(x+t) - f_+(-x-t), \\ f_-(x-t) &= y(-x+t) - g_-(-x+t). \end{aligned} \right| x, t \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo g_+ y f_- de las ecuaciones anteriores en (15) obtenemos (48)

$$u(x, t) = \begin{cases} y(x+t) + f_+(x-t) - f_+(-x-t), & x > 0, \\ y(-x+t) - g_-(-x+t) + g_-(x+t), & x < 0, \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} t \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Derivando (46) en el sentido $\mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tenemos

$$(49) \quad g'_+(\tau) = y'(\tau) + f'_+(-\tau), \quad -f'_-(-\tau) = y'(\tau) - g'_-(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Luego en virtud de la Definición 6.2.3 obtenemos

$$(50) \quad u'(0+, t) = y'(t) + 2f'_+(-t), \quad u'(0-, t) = -y'(t) + 2g'_-(t), \quad | t \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la segunda ecuación del sistema (1) obtenemos

$$(51) \quad 0 = F(y(t)) + 2\dot{y}(t) - 2(g'_-(t) - f'_+(-t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, la ecuación reducida (37) se sigue de la definición de w_{out} , (39). Finalmente, la segunda expresión de (40) se obtiene de la definición y de (29). \square

Corolario 6.4.2. *Si existe una solución $u(x, t)$ a el sistema de Lamb (1) en la región $0 \leq |x| < t$, $t > 0$, entonces $u(x, t)$ se expresa mediante (45) y es única.*

De manera análoga se tiene un resultado cuando $t < 0$ y cuya demostración es similar.

Corolario 6.4.3. *Si existe la solución $u(x, t)$ a el sistema de Lamb (1) en la región $t < |x| \leq 0$, $t < 0$, entonces $u(x, t)$ se expresa mediante (48) y es única.*

6.4.1. Existencia y unicidad local de las soluciones de la ecuación reducida

Demostramos que existe una única solución local para el problema de Cauchy (36), (35), en una clase de las funciones continuas, usando el Principio de Contracción²

²**Definición.** Sea (X, ρ) un espacio métrico. Si existe un número $L < 1$ tal que la función $f : X \rightarrow X$ satisface la desigualdad $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq L\rho(x_1, x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in X$, entonces decimos que f es una contracción en X .

Teorema. *Sea (X, d) es un espacio métrico completo. Si $f : X \rightarrow X$ es una contracción en X , entonces existe un único $a \in X$ tal que $f(a) = a$.*

Definición 6.4.1.1. Sea $I_\epsilon := [0, \epsilon]$. Definimos el espacio de funciones $L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$ por

$$(52) \quad L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d) := \{y \in C(I_\epsilon; \mathbb{R}^d) \mid \dot{y} \in L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)\},$$

con la norma

$$(53) \quad \|y\|_{L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} := \|\dot{y}\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} + |y(0)|$$

en donde, la derivada de y se entiende en el sentido de distribuciones.

Observación 6.4.1.2. $(L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)})$ es un espacio de Banach.

No es difícil demostrar que

Lema 6.4.1.3. Si $y \in L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$ con $y(0) = 0$, entonces

$$(54) \quad \|y\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \leq \epsilon \|y\|_{L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}.$$

Sea $\mathcal{M}_\epsilon := \{y \in L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d) \mid y(0) = u_0\}$. Es claro que \mathcal{M}_ϵ es cerrado en $L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$, luego \mathcal{M}_ϵ es un espacio métrico completo con la métrica generada por la norma (53). Consideremos el operador integral $A : \mathcal{M}_\epsilon \rightarrow \mathcal{M}_\epsilon$ definido por

$$(55) \quad (Ay)(t) := \frac{1}{2} \int_0^t F(y(\tau)) d\tau + \int_0^t \dot{w}_{in}(\tau) d\tau + u_0, \quad t \in I_\epsilon,$$

en donde, F es como en (9) y $w_{in}(t)$ está definida por (38). Es fácil verificar que A realmente manda \mathcal{M}_ϵ en si mismo, ya que $(Ay)(0) = u_0$ y $\frac{d}{dt}[(Ay)(t)] \in L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$ por (40) y dado que $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. El objetivo consiste en demostrar que el operador integral A es una contracción, para una elección apropiada de algún $\epsilon_0 > 0$, en el espacio métrico \mathcal{M}_{ϵ_0} . De esta manera, estaremos demostrando que hay una sola $y(t) \in \mathcal{M}_\epsilon$ tal que

$$Ay(t) = y(t), \quad t \in I_\epsilon.$$

Ya que $y \in \mathcal{M}_{\epsilon_0}$, se tiene que $y(0) = u_0$, entonces encontrar un punto fijo del operador integral A , definido por (55), es equivalente a encontrar una solución única $y(t) \in \mathcal{M}_{\epsilon_0}$ del problema de Cauchy (36), (35).

Proposición 6.4.1.4 (Contracción de A). Para todo $\epsilon > 0$, el operador integral $A : \mathcal{M}_\epsilon \rightarrow \mathcal{M}_\epsilon$, definido por (55), es Lipschitz-continuo con constante de Lipschitz $K(\epsilon) = \frac{K_1}{2}\epsilon$; es decir, existe una constante $K_1 \geq 0$ que no depende de $\epsilon \in [0, 1]$, tal que $\forall y^1, y^2 \in \mathcal{M}_\epsilon$, tenemos que

$$(56) \quad \|Ay^1 - Ay^2\|_{L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \leq K(\epsilon) \|y^1 - y^2\|_{L_1^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}.$$

Demostración. La ecuación (55), implica que

$$(57) \quad Ay^1(t) - Ay^2(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [F(y^1(\tau)) - F(y^2(\tau))] d\tau.$$

Derivando con respecto a t (usando el Teorema de Newton-Liebniz, dado que $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ e $y \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathbb{R}^d)$) obtenemos

$$(58) \quad \frac{d}{dt} [Ay^1(t) - Ay^2(t)] = \frac{1}{2} [F(y^1(t)) - F(y^2(t))].$$

Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $F(y) = 0$ para $|y| \geq R > 2|u_0|$. En el caso cuando esto no se cumpla podemos multiplicar a $F(y)$ por la función

$$(59) \quad \chi(y) := \begin{cases} 1, & |y| \leq \frac{3}{2}R, \\ 0, & |y| \geq R \end{cases}$$

y entonces caemos en la situación anterior. Primero notemos que existe K_1 que no depende de $\epsilon \in [0, 1]$ tal que para cada $y^1(t), y^2(t) \in L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$,

$$(60) \quad |F(y^1(t)) - F(y^2(t))| \leq K_1 |y^1(t) - y^2(t)|, \quad t \in I_\epsilon.$$

En efecto. Lo anterior se sigue del hecho que $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ y $\text{supp}(F)$ es compacto:

$$|F(y^1(t)) - F(y^2(t))| \leq \sup_{z \in \text{supp}(F)} |F'(z)| \cdot |y^1(t) - y^2(t)|$$

en donde, $F'(z)$ es el jacobiano de F y la norma de $F'(z)$ esta acotada en $\text{supp}(F)$. De aqui (60) se sigue para $K_1 = \sup |F'(z)|$. Luego, de (58) y (60) obtenemos

$$(61) \quad \left| \frac{d}{dt} [Ay^1(t) - Ay^2(t)] \right| \leq \frac{K_1}{2} |y^1(t) - y^2(t)|, \quad t \in I_\epsilon, \quad \epsilon \in [0, 1].$$

Lo cual implica que

$$(62) \quad \left\| \frac{d}{dt} [Ay^1(t) - Ay^2(t)] \right\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{K_1^2}{4} \int_{I_\epsilon} [|y^1(t) - y^2(t)|]^2 dt.$$

o equivalentemente

$$(63) \quad \left| \frac{d}{dt} [Ay^1(t) - Ay^2(t)] \right|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{K_1}{2} \|y^1(t) - y^2(t)\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}, \quad \epsilon \in [0, 1].$$

Definimos $\sigma(t) := y^1(t) - y^2(t)$, entonces $\sigma \in L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$; en particular $\dot{\sigma} \in L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d) \subset L^1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$. Luego, por el Teorema fundamental del cálculo en el sentido de Lebesgue y tomando en cuenta que $\sigma(0) = 0$, ya que $y^1, y^2 \in \mathcal{M}_\epsilon$ tenemos

$$(64) \quad \sigma(t) = \int_0^t \dot{\sigma}(s) ds.$$

Es claro que $\sigma \in C(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)$. Además, dado que $\sigma(0) = 0$, entonces por (54) se satisface la desigualdad

$$(65) \quad \|\sigma\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \leq \epsilon \|\dot{\sigma}\|_{L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}.$$

Ahora a partir de la definición de σ (65) es equivalente a

$$(66) \quad \|y^1(t) - y^2(t)\|_{L^2(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)} \leq \epsilon \|y^1(t) - y^2(t)\|_{L^2_1(I_\epsilon; \mathbb{R}^d)}, \quad \epsilon \in [0, 1].$$

Luego de (63), (66), (55) y (53) obtenemos (56). \square

Corolario 6.4.1.5 (Existencia y unicidad local). *Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que el problema de Cauchy (36), (35) admite una solución única $y(t) \in L^2_1(I_{\epsilon_0}; \mathbb{R}^d)$, para $t \in [0, \epsilon_0)$.*

Demostración. Sea $K(\epsilon) = \frac{K_1}{2}\epsilon$. Si $\epsilon \rightarrow 0$, entonces $K(\epsilon) \rightarrow 0$. Luego, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $0 \leq K(\epsilon_0) < 1$. Entonces, para tal ϵ_0 el operador integral A definido por (55) es una contracción en \mathcal{M}_{ϵ_0} por Proposición 6.4.1.4. Luego, el Principio de Contracción implica que existe $y(t) \in \mathcal{M}_\epsilon$ tal que $Ay(t) = y(t)$, $t \in [0, \epsilon_0)$. Por lo tanto de (55) se sigue

$$(67) \quad y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t F(\varphi(\tau)) d\tau + \int_0^t \dot{w}_{in}(\tau) d\tau + u_0(0), \quad t \in [0, \epsilon_0),$$

Finalmente diferenciando a (67) con respecto a t obtenemos que $y(t) \in \mathcal{M}_{\epsilon_0}$ es solución del problema de Cauchy (36), (35). \square

6.4.2. Existencia y continuidad de la solución global a la ecuación reducida

La meta principal de esta subsección consiste en demostrar la existencia global, para $t > 0$ de la solución local del problema de Cauchy (36), (35) y además que esta es única. Así como también demostrar que esta solución es continua en $\overline{\mathbb{R}_+}$. La existencia de la extensión y continuidad de $y(t)$ para $t > 0$ se sigue de la estimación a priori que a continuación desarrollaremos y la cual es esencial en nuestro trabajo.

Proposición 6.4.2.1 (Estimación a priori). *Las soluciones de la ecuación (36), con F satisfaciendo (10) admite la estimación a priori*

$$(68) \quad \sup_{t>0} |y(t)| + \int_0^\infty |\dot{y}(t)|^2 dt \leq B < \infty,$$

en donde, B es acotado para $\|(u_0, v_0)\|_\varepsilon$ acotado.

Demostración. Tomando el producto interior de $\dot{y}(t)$ con cada miembro de la ecuación (36) y usando la identidad $F(y) = -\nabla V(y)$ obtenemos

$$\left(\nabla V(y(t)) \right) \cdot \dot{y}(t) = -2\dot{y}(t) \cdot \dot{y}(t) + 2\dot{w}_{in}(t) \cdot \dot{y}(t), \quad t \geq 0.$$

lo cual es equivalente a

$$\frac{d}{dt} V(y(t)) = -2|\dot{y}(t)|^2 + 2\dot{w}_{in}(t) \cdot \dot{y}(t), \quad \text{para casi todo } t \geq 0.$$

Ahora utilizando la desigualdad $-2a^2 + 2ab \leq -a^2 + b^2$, obtenemos

$$-2|\dot{y}(t)|^2 + 2\dot{w}_{in}(t) \cdot \dot{y}(t) \leq -|\dot{y}(t)|^2 + |\dot{w}_{in}(t)|^2.$$

Luego, para casi todo $t \geq 0$,

$$(69) \quad \frac{d}{dt} V(y(t)) \leq -|\dot{y}(t)|^2 + |\dot{w}_{in}(t)|^2.$$

Entonces, la fórmula de Newton-Leibniz clásica implica (dado que $V \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$)

$$(70) \quad V(y(t)) + \int_0^t |\dot{y}(s)|^2 ds \leq V(y(0)) + \int_0^t |\dot{w}_{in}(s)|^2 ds,$$

para todo $t \geq 0$.

Ahora dado que $\dot{w}_{in}(t) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ por el Lema 6.4.1, entonces existe $B_1 \geq 0$ tal que

$$\int_0^\infty |\dot{w}_{in}(s)|^2 ds \leq B_1.$$

Notemos que B_1 es acotada si $\|(u_0, v_0)\|_\varepsilon$ es acotada ya que \dot{w}_{in} se expresa por medio de u_0 y v_0 mediante las fórmulas de (26).

Luego, para todo $t \geq 0$,

$$(71) \quad V(y(t)) + \int_0^\infty |\dot{y}(s)|^2 ds \leq B_2,$$

en donde, $B_2 = V(y(0)) + B_1$, la cual es acotada ya que B_1 lo es siempre que $\|(u_0, v_0)\|_\varepsilon$ es acotado. La desigualdad (71) implica que $V(y(t)) \leq B_2$ para todo $t \geq 0$. Por otro lado, $V(y) \rightarrow +\infty$ cuando $|y| \rightarrow \infty$, por (9). Entonces, existe $B_3 \geq 0$ tal que

$$(72) \quad \sup_{t>0} |y(t)| \leq B_3.$$

Finalmente, (71) y (72) implican la estimación a priori (68). Además B_3 es acotado si $\|(u_0, v_0)\|_\varepsilon$ es acotado ya que B_2 tiene esta propiedad. \square

El Corolario 6.4.1.5 implica la existencia local de solución a el problema de Cauchy (36), (35). En el siguiente corolario demostraremos, usando la estimación a priori (68) la existencia global de tal solución.

Corolario 6.4.2.2 (Existencia global). *La solución local $y : [0, \epsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$, obtenida por el Principio de Contracción, para problema de Cauchy (36), (35) puede ser extendida al semi eje \mathbb{R}_+ y tal extensión $y(t)$ es continua en $\overline{\mathbb{R}_+}$:*

$$(73) \quad y(t) \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathbb{R}^d).$$

Demostración. La estimación a priori (68) implica $|y(t)| \leq B < \infty$ para casi todo $t > 0$, lo cual muestra la existencia de la solución global para casi todo $t > 0$ por argumentos estándares (con ciertas modificaciones) de la teoría de ecuaciones diferenciales (ver por ejemplo [2, página 102]). La inclusión (73) se sigue también de la estimación a priori (68). \square

Corolario 6.4.2.3. *i) La estimación a priori (68), las identidades (43) y (46) implican por (29)*

$$(74) \quad f'_+(\tau) \in L^2(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d), \quad g'_-(\tau) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \quad \tau > 0,$$

$$(75) \quad g'_+(\tau) \in L^2(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d), \quad f'_-(\tau) \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \quad \tau < 0.$$

De (74), (75) y (29) se sigue que

$$(76) \quad f'_-(\tau), f'_+(\tau), g'_-(\tau), g'_+(\tau) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d).$$

ii) (74) y (75) implican

$$(77) \quad f_+(\tau) \in C(\overline{\mathbb{R}_-}; \mathbb{R}^d), \quad g_-(\tau) \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathbb{R}^d),$$

$$(78) \quad f_-(\tau) \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathbb{R}^d), \quad g_+(\tau) \in C(\overline{\mathbb{R}_-}; \mathbb{R}^d).$$

iii)

$$(79) \quad f_-(\tau), f_+(\tau), g_-(\tau), g_+(\tau) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d).$$

Demostración (de iii). Probemos que $f_+(\tau), g_-(\tau) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. La continuidad de f_+, g_- (30), (26) y (28) implican que

$$(80) \quad f_-(0-) = f_+(0+) = g_-(0-) = g_+(0+) = \frac{u_0(0)}{2}.$$

Por lo tanto, (73), (43), (35) y (30) nos dan que

$$(81) \quad \begin{cases} f_+(0-) = y(0) - g_+(0+) = \frac{u_0(0)}{2}, \\ g_-(0+) = y(0) - f_-(0-) = \frac{u_0(0)}{2}. \end{cases}$$

De aquí tenemos

$$(82) \quad f_+(0-) = f_+(0+), \quad \text{y} \quad g_-(0-) = g_-(0+).$$

Ahora (78) y (30) implican $f_+(\tau), g_-(\tau) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Similarmente (73), (46), (35) y (30) implican

$$(83) \quad \begin{cases} f_-(0+) = y(0) - g_-(0-) = \frac{u_0(0)}{2}, \\ g_+(0-) = y(0) - f_+(0+) = \frac{u_0(0)}{2}. \end{cases}$$

luego tenemos que

$$(84) \quad f_-(0+) = f_-(0-), \quad \text{y} \quad g_+(0-) = g_+(0+).$$

Finalmente (78) y (30) implican $f_-(\tau), g_+(\tau) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. □

7. Existencia y continuidad de la dinámica $Y(t)$ del sistema de Lamb

A continuación demostraremos la existencia y continuidad de la solución a el problema de Cauchy (5), $Y(t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathcal{E})$, esto completa la prueba del punto 1 del Teorema 5.1. Para tal fin usaremos los resultados de la secciones previas. Sea

$$(85) \quad R_t := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq t \geq 0\}.$$

Demostración del Teorema 5.1, 1. Probaremos la existencia de una solución $Y(t) = (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \in \mathcal{E}$ del problema de Cauchy (5) para $t \geq 0$. El caso $t \leq 0$ se muestra de forma similar. En otras palabras demostraremos que existe una solución $(u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \in \mathcal{E}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ que satisface el sistema de Lamb (1) y las condiciones iniciales (3). El desarrollo de la prueba será en varios pasos:

Paso 1. Definimos $u(x, t)$ en la región $|x| \geq t$ mediante la fórmula de D' Alembert (31). Demostremos que $u(x, t) \in C(R_t; \mathbb{R}^d)$, $u'(x, t), \dot{u}(x, t) \in L^2(R_t; \mathbb{R}^d)$. En efecto, $u(x, t) \in C(R_t; \mathbb{R}^d)$ para $t \geq 0$, dado que $u_0(z) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y $v_0(z) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ (ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{E}$). Además (31) implica

$$(86) \quad \begin{aligned} u'(x, t) &= \frac{1}{2}[u'_0(x-t) + u'_0(x+t)] + \frac{1}{2}[v_0(x+t) - v_0(x-t)], \\ \dot{u}(x, t) &= \frac{1}{2}[u'_0(x+t) - u'_0(x-t)] + \frac{1}{2}[v_0(x+t) + v_0(x-t)], \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \\ |x| \geq t \end{array}$$

de donde se ve que

$$(87) \quad u'(x, t), v(x, t) = \dot{u}(x, t) \in L^2(R_t; \mathbb{R}^d), \quad t \geq 0,$$

ya que $u'_0(z), v_0(z) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$, pues (u_0, v_0) son elementos de \mathcal{E} .

Paso 2. Definimos $u(x, t)$ en la región $|x| < t$, para $t > 0$. Primero, resolviendo la ecuación reducida (36) con la condición inicial (35) obtenemos, por el Corolario 6.4.2.2 la única solución $y(t)$ que cumple (73). Ahora definimos $u(x, t)$ por (45) en el sentido de distribuciones para $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, en donde las funciones g_+ y f_- se expresan mediante las fórmulas (26) para $\pm z > 0$ y $y(t)$ es la solución del problema de Cauchy (36), (35). Demostremos que $u(x, t) \in C(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)$ y $u'(x, t), \dot{u}(x, t) \in L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)$ para $t > 0$.

1) $u(x, t) \in C(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)$, $t > 0$. Esto se sigue de (45), la continuidad de $y(t)$ (véase Corolario 6.4.2.2) y la continuidad de f_{\pm}, g_{\pm} , (véase (30)).

2) La ecuación (45) implica para $t > 0$

$$(88) \quad u'(x, t) = \begin{cases} -y'(t-x) + g'_+(t-x) + g'_+(x+t), & x > 0, \\ y'(t+x) + f'_-(-t-x) + f'_-(x-t), & x < 0, \end{cases}$$

y

$$(89) \quad \dot{u}(x, t) = \begin{cases} \dot{y}(t-x) - g'_+(t-x) + g'_+(x+t), & x > 0, \\ \dot{y}(t+x) + f'_-(-t-x) - f'_-(x-t), & x < 0. \end{cases}$$

De donde observamos que $u'(x, t), \dot{u}(x, t) \in L^2(\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < t\}; \mathbb{R}^d)$ $t > 0$, ya que $\dot{y} \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ y $g'_+, f'_- \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por la estimación a priori (68) y (76).

Paso 3. Sea $t > 0$. Mostremos la continuidad de $u(x, t)$ en: 1) $x = t$ para $x > 0$, y 2) $x = -t$ si $x < 0$.

1) Por la representación (45), tenemos

$$(90) \quad u(t-, t) = y(0) - g_+(0) + g_+(2t), \quad x > 0, \quad t > 0,$$

de aquí vemos que $u(t-, t)$ es continua por (73) y (79).

2) La descomposición de D' Alembert (31) implica

$$(91) \quad u(-t+, t) = \frac{u_0(0)}{2} + \frac{u_0(-2t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-2t}^0 v_0(\chi) d\chi = u(-t-, t); \quad x < 0, \quad t > 0,$$

la cual también es continua.

Por lo tanto, tomando en cuenta que $u(x, t) \in C(\{|x| \leq t\}; \mathbb{R}^d)$ (por Paso 2 y Paso 3) y $u(x, t) \in C(\{|x| \geq t\}; \mathbb{R}^d)$ (por Paso 1) obtenemos

$$(92) \quad u(x, t) \in C(\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq t, t \geq 0\}; \mathbb{R}^d).$$

De esta forma los Pasos 2 y 3 implican que $(u(x, t), \dot{u}(x, t)) \in \mathcal{E}$ para todo $t > 0$.

Paso 4. A continuación probemos que la función $u(x, t)$ satisface el sistema de Lamb (1) y las condiciones iniciales (3). Las aseveraciones 1. y 2. del Teorema 6.1 muestra que $u(x, t)$ satisface la ecuación 1 de (1) para $x \neq 0, t \in \mathbb{R}$. Probemos que $u(x, t)$ satisface la segunda ecuación del sistema de Lamb. La expresión (45) implica para $t > 0$

$$(93) \quad u'(0+, t) = -\dot{y}(t) + 2g'_+(t), \quad u'(0-, t) = \dot{y}(t) + 2f'_-(-t).$$

Luego, sustituyendo las ecuaciones anteriores en la segunda ecuación del sistema (1), obtenemos

$$F(y(t)) - 2\dot{y}(t) + 2(g'_+(t) - f'_-(-t)), \quad t > 0.$$

Ahora en virtud de la ecuación reducida (36), la definición de w_{in} (38) y (73) obtenemos la igualdad en la segunda ecuación del sistema de Lamb. Finalmente la descomposición de D'Alembert (31) fija las condiciones (3).

Paso 5. Demostremos que $Y(t) \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathcal{E})$. Por la Definición 4.1 de norma en \mathcal{E}

$$\begin{aligned} (94) \quad \|Y(t_1) - Y(t_2)\|_{\mathcal{E}} &= |u(0, t_1) - u(0, t_2)| \\ &\quad + \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &= |y(t_1) - y(t_2)| + \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Sea $\epsilon > 0$. Por (73) existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$(95) \quad |y(t_1) - y(t_2)| < \frac{\epsilon}{6}, \quad \text{si } |t_1 - t_2| < \delta_1.$$

Ahora examinemos los últimos términos.

Caso 1: por abajo de la características. Por monotonía de la integral de Lebesgue y usando (86) tenemos

$$\begin{aligned} &\left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &\leq \left\| \frac{1}{2}[u'_0(x - t_1) - u'_0(x - t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(x + t_1) - u'_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &+ \left\| \frac{1}{2}[v_0(x + t_1) - v_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[v_0(x - t_1) - v_0(x - t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

en donde, R_t es como en (85). Sea $\Delta t := t_2 - t_1$. Haciendo un cambio de variable (en el sentido de Lebesgue): $y = x - t_1$ y usando la continuidad de las traslaciones en L^2 (véase por ejemplo [3, páginas 255–257]) tenemos para la última desigualdad que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{2}[u'_0(y) - u'_0(y - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(y) - u'_0(y + \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &+ \left\| \frac{1}{2}[v_0(y) - v_0(y + \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[v_0(y) - v_0(y - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} < \frac{\epsilon}{6}, \end{aligned}$$

si $|\Delta t| < \delta_2$, ya que $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Esto implica que

$$(96) \quad \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{6}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_2.$$

Finalmente para el último sumando de (94) tenemos, de (86)

$$\begin{aligned} & \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)} \\ & \leq \left\| \frac{1}{2}[u'_0(x - t_1) - u'_0(x - t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(x + t_1) - u'_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & + \left\| \frac{1}{2}[v_0(x + t_1) - v_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[v_0(x - t_1) - v_0(x - t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Ahora usando los mismos argumentos como en el sumando anterior tenemos que existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$(97) \quad \left\| \frac{1}{2}[u'_0(y) - u'_0(y - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(y) - u'_0(y + \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ + \left\| \frac{1}{2}[v_0(y) - v_0(y + \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[v_0(y) - v_0(y - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} < \frac{\epsilon}{6},$$

si $|\Delta t| < \delta_3$, ya que $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Esto implica que

$$(98) \quad \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{6}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_3.$$

Ahora de (95), (96) y (98) tenemos

$$(99) \quad |u(0, t_1) - u(0, t_2)| + \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \\ + \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{si } |\Delta t| < \bar{\delta}_1,$$

en donde, $\bar{\delta}_1 := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$.

Caso 2: en la región $|x| < |t|$. La ecuación (88) para $x > 0, t > 0$, las fórmulas (26) y la monotonía de la integral implican

$$\begin{aligned} & \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2((0, t); \mathbb{R}^d)} \leq \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & \leq \|\dot{y}(t_1 - x) - \dot{y}(t_2 - x)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(t_1 - x) - u'_0(t_2 - x)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & + \left\| \frac{1}{2}[u'_0(x + t_1) - u'_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2}[v_0(t_1 - x) - v_0(t_2 - x)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & \quad + \left\| \frac{1}{2}[v_0(x + t_1) - v_0(x + t_2)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Sea $\Delta t := t_1 - t_2$. Haciendo los cambios de variable (en el sentido de Lebesgue): $\zeta_1 = t_1 - x$, $\zeta_2 = x + t_1$ y usando la continuidad de las

traslaciones en L^2 (véase por ejemplo [3, páginas 255-257]) tenemos, para la última desigualdad, que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \|\dot{y}(\zeta_1) - \dot{y}(\zeta_1 - \Delta t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [u'_0(\zeta_1) - u'_0(\zeta_1 - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & + \left\| \frac{1}{2} [u'_0(\zeta_2) - u'_0(\zeta_2 - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0(\zeta_1) - v_0(\zeta_1 - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & + \left\| \frac{1}{2} [v_0(\zeta_2) - v_0(\zeta_2 - \Delta t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{8} \end{aligned}$$

si $|\Delta t| < \delta_1$, ya que $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y $\dot{y} \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ por (68). Por lo tanto

$$(100) \quad \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2((0, t); \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{8}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_1.$$

De manera análoga, usando (88) para $x < 0, t > 0$ y los argumentos anteriores tenemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$(101) \quad \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2((-t, 0); \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{8}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_2.$$

Por lo tanto (100) y (101) implican

$$(102) \quad \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2))' \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2).$$

Usando (89), obtenemos de manera análoga que existe $\delta_4 > 0$ tal que

$$(103) \quad \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{4}, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta_4.$$

Ahora (102) y (103) implican

$$(104) \quad |u(0, t_1) - u(0, t_2)| + \left\| (u(x, t_1) - u(x, t_2)) \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \\ + \|\dot{u}(x, t_1) - \dot{u}(x, t_2)\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \text{si } |\Delta t| < \overline{\delta_2},$$

en donde, $\overline{\delta_2} = \min(\delta_1, \delta_3, \delta_4)$ Por lo tanto, de la definición de norma en \mathcal{E} y de (99) y (104) tenemos

$$\|Y(t_1) - Y(t_2)\|_{\mathcal{E}} \leq \epsilon, \quad \text{si } |\Delta t| < \delta = \min(\overline{\delta_1}, \overline{\delta_2}).$$

El primer punto del Teorema 5.1 esta probado. \square

8. Continuidad del flujo $U(t)$ del sistema de Lamb

En esta parte demostraremos el punto 2 del Teorema 5.1. La prueba usa las construcciones de las subsecciones previas. Probaremos un resultado que establece que las soluciones de la ecuación (36) dependen continuamente de los datos iniciales (3).

Lema 8.1. *Consideremos el problema de Cauchy (5) con los datos iniciales $Y_0^i = (u_0^i, v_0^i) \in \mathcal{E}$, $i = 1, 2$. Sean $y^1(t), y^2(t)$ dos soluciones correspondientes de la ecuación reducida (36) con las condiciones iniciales*

$$(105) \quad y^1(0) = u_0^1(0), \quad y^2(0) = u_0^2(0)$$

Entonces, para cualquier $T > 0$ existen $C_T > 0$, $C_T^0 > 0$ tal que

$$(106) \quad \max_{t \in [0, T]} |y^1(t) - y^2(t)| \leq C_T \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}},$$

$$(107) \quad \|\dot{y}^1(t) - \dot{y}^2(t)\|_{L^2([0, T]; \mathbb{R}^d)} \leq C_T^0 \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}.$$

Además C_T y C_T^0 son acotadas si $\|Y_0^i\|_{\mathcal{E}}$, $i = 1, 2$ es acotado.

Demostración. Sean $y^1(t), y^2(t)$ soluciones de (36) con (105) satisfaciéndose. Supongamos que $(u_0^i, v_0^i) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$, $i = 1, 2$, en donde \mathcal{B} es un conjunto acotado. Esto implica que $u_0^1(0), u_0^2(0) \in \mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^d$ en donde \mathcal{B}_0 es acotado por la Definición 4.1 de \mathcal{E} . Luego $y^1(t), y^2(t) \in \mathcal{B}_1 \subset \mathbb{R}^d$ para $t > 0$ con \mathcal{B}_1 acotado por la cota a priori (68), Proposición 6.4.2.1. Entonces como $F \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ por (9), tenemos

$$(108) \quad \left| \frac{d}{dt} (y^1(t) - y^2(t)) \right| = \frac{1}{2} |F(y^1(t)) - F(y^2(t))| \\ \leq C_1 |y^1(t) - y^2(t)|, \quad t \in [0, T],$$

en donde, $C_1 > 0$ es acotada ya que $y^1(t), y^2(t)$ están contenidas en el conjunto acotado \mathcal{B}_1 para $t \in [0, T]$. Esta desigualdad implica la estimación

$$|y^1(t) - y^2(t)| \leq C_1 \int_0^t |y^1(\tau) - y^2(\tau)| d\tau + |y^1(0) - y^2(0)|, \quad t \in [0, T].$$

Ahora usando la desigualdad de Gronwall [8, página 3] obtenemos

$$|y^1(t) - y^2(t)| \leq |y^1(0) - y^2(0)| e^{C_1 t}, \quad t \in [0, T].$$

Tomando el máximo sobre el intervalo $[0, T]$ (ya que $y^1, y^2 \in C(\overline{\mathbb{R}_+}; \mathbb{R}^d)$) por (34) y Proposición 6.1.1) obtenemos

$$(109) \quad \max_{t \in [0, T]} |y^1(t) - y^2(t)| \leq C_T |y^1(0) - y^2(0)|,$$

en donde, $C_T = e^{C_1 T}$ es acotada ya que C_1 es acotada. Además, por (105) $|y^1(0) - y^2(0)| = |u_0^1(0) - u_0^2(0)| \leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}$. Entonces, (109) implica (106).

Ahora mostremos la segunda estimación. Usando (108) y (106) obtenemos

$$\begin{aligned} & \|\dot{y}^1(t) - \dot{y}^2(t)\|_{L^2([0, T]; \mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \int_0^T |\dot{y}^1(t) - \dot{y}^2(t)|^2 dt \leq C_1^2 \int_0^T |y^1(t) - y^2(t)|^2 dt \\ &\leq C_1^2 \int_0^T C_T^2 \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}^2 dt = C_1^2 C_T^2 T \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}^2. \end{aligned}$$

Así hemos demostrado (107), en donde $C_T^0 = C_1^2 C_T^2 T$ es acotada ya que C_1 y C_T son acotadas. \square

Sea t fijo y $Y_0^1 = (u_0^1, v_0^1)$ y $Y_0^2 = (u_0^2, v_0^2)$. El siguiente teorema prueba el punto 2 del Teorema 5.1.

Teorema 8.2. *Para todo $t > 0$ existe $C_t > 0$ tal que*

$$|Y^1(t) - Y^2(t)| \leq C_t \|Y_0^1 - Y_0^2\|_{\mathcal{E}}$$

es decir, $U(t)$ es continua en \mathcal{E} .

Demostración. Por la Definición 4.1 de norma en \mathcal{E}

$$\begin{aligned} (110) \quad & \|Y^1(t) - Y^2(t)\|_{\mathcal{E}} = |u^1(0, t) - u^2(0, t)| + \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & \quad + \|\dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ &= |y^1(t) - y^2(t)| + \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & \quad + \|\dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Ahora

$$(111) \quad \left| u^1(0, t) - u^2(0, t) \right| \leq C_t \|Y_0^1 - Y_0^2\|_\varepsilon$$

por el Lema 8.1 y dado que $u^i(0, t) = y^i(t)$, $i = 1, 2$ (véase (34)). Resta examinar los últimos términos.

Caso 1: por abajo de las características. Por monotonía de la integral de Lebesgue, en donde R_t se define en (85) y usando (86) obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & \leq \left\| \frac{1}{2} [(u_0^1)'(x-t) - (u_0^2)'(x-t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(x+t) - v_0^2(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & + \left\| \frac{1}{2} [(u_0^1)'(x+t) - (u_0^2)'(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(x-t) - v_0^2(x-t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & = \|(u_0^1)' - (u_0^2)'\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|v_0^1 - v_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_\varepsilon, \end{aligned}$$

ya que $\int |f(x \pm t)|^2 dx = \int |f(x)|^2 dx$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$. Esto implica que

$$(112) \quad \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_\varepsilon.$$

Finalmente para el último sumando de (110) tenemos, de (86)

$$\begin{aligned} & \left\| \dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t) \right\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \left\| \dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & \leq \left\| \frac{1}{2} [(u_0^2)'(x-t) - (u_0^1)'(x-t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(x+t) - v_0^2(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & + \left\| \frac{1}{2} [(u_0^1)'(x+t) - (u_0^2)'(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(x-t) - v_0^2(x-t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\ & = \|(u_0^1)' - (u_0^2)'\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|v_0^1 - v_0^2\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_\varepsilon, \end{aligned}$$

en donde hemos usando, como en el anterior sumando, el cambio de variable para la integral de Lebesgue. Luego obtenemos

$$(113) \quad \left\| \dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t) \right\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq \|Y_0^1 - Y_0^2\|_\varepsilon.$$

Ahora (111), (112) y (113) implican

$$(114) \quad \left| u^1(0, t) - u^2(0, t) \right| + \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t)) \right\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \\ + \left\| \dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t) \right\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq C_t \|Y_0^1 - Y_0^2\|_\varepsilon.$$

Caso 2: en la región $|x| < |t|$. De (88) y usando las fórmulas (26) tenemos, cuando $x > 0$, por la monotonía de la integral, el cambio de variable en la integral de Lebesgue y por el Lema 8.1 (estimación (107)):

$$\begin{aligned}
& \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2((0, t); \mathbb{R}^d)} \leq \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\
& \leq \left\| \dot{y}^2(t-x) - \dot{y}^1(t-x) \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [(u_0^1)'(t-x) - (u_0^2)'(t-x)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\
& + \left\| \frac{1}{2} [(u_0^1)'(x+t) - (u_0^2)'(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(t-x) - v_0^2(t-x)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\
& \quad + \left\| \frac{1}{2} [v_0^1(x+t) - v_0^2(x+t)] \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\
& = \left\| \dot{y}^2 - \dot{y}^1 \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| (u_0^1)' - (u_0^2)' \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \left\| v_0^1 - v_0^2 \right\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \\
& \leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.
\end{aligned}$$

Similarmente, usando (88) para $x < 0$ obtenemos

$$\left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2((-t, 0); \mathbb{R}^d)} \leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

Luego

$$(115) \quad \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t))' \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

Usando (89), obtenemos de manera análoga

$$(116) \quad \left\| \dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t) \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

Ahora (111), (115) y (116) implican

$$(117) \quad \left| u^1(0, t) - u^2(0, t) \right| + \left\| (u^1(x, t) - u^2(x, t)) \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \\
+ \left\| \dot{u}^1(x, t) - \dot{u}^2(x, t) \right\|_{L^2(\{|x| < t\}; \mathbb{R}^d)} \leq C_t \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

Por lo tanto, de la definición de norma en \mathcal{E} y de (114) y (117) tenemos

$$\left\| Y^1(t) - Y^2(t) \right\|_{\mathcal{E}} \leq C_t^0 \left\| Y_0^1 - Y_0^2 \right\|_{\mathcal{E}}.$$

El Teorema 8.2 esta probado. \square

Observación 8.3. La continuidad de $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ en \mathcal{E}_F se demuestra de manera similar a como se probó el Teorema 8.2.

9. Conservación de la energía del sistema de Lamb

El plan para demostrar la conservación de la energía en el sistema de Lamb es el siguiente: probaremos la ley de conservación de energía, punto 3 del Teorema 5.1 para datos iniciales suficientemente suaves y después usaremos argumentos de densidad en subespacios adecuados de \mathcal{E} junto con la continuidad de $\mathcal{H}(Y(t))$ (ver (12)) como función de $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ y la continuidad del flujo $U(t)$. Antes damos algunos resultados técnicos.

Definición 9.1. Sea \mathcal{F} el conjunto de las parejas $(u(x), v(x))$ tales que:

1. $u \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$, $v \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ y
2. los límites $u(0\pm)$, $u'(0\pm)$ y $v(0\pm)$ existen.

Corolario 9.2. La Definición 9.1 implica que $u'(x \pm t), v(x \pm t) \in C^2(\{|x| \neq |t|\}; \mathbb{R}^d)$.

A continuación demostraremos una propiedad importante de las soluciones de las ecuaciones reducidas (36) y (37), para $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente, suponiendo que los datos iniciales del problema de Cauchy para el sistema de Lamb pertenecen a el conjunto \mathcal{F} .

Lema 9.3. Sea $y(t)$ una solución de las ecuación reducidas (36) (37), para $t > 0$ y $t < 0$ respectivamente y supongamos que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$. Entonces, $y(t) \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$.

Demostración. Sea $t > 0$. Las fórmulas (26) y la definición de $w_{in}(t)$ (38) implican

$$(118) \quad \dot{w}_{in}(t) = R(t), \quad t > 0,$$

en donde, $R(t) := \frac{u'_0(t) - u'_0(-t)}{2} + \frac{v_0(t) + v_0(-t)}{2}$. Esto implica que $\dot{w}_{in}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, dado que $u'_0, v_0 \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ (ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$). Además, por Proposición 6.1.1 y (34) tenemos que $y(t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$; luego como $F \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ (ver (9)), entonces $F(y(t)) \in C(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$. Ahora usando la ecuación reducida (36) junto con la continuidad de $F(y(t))$ y $\dot{w}_{in}(t)$ en \mathbb{R}_+ obtenemos que $\dot{y}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$.

Sea $t < 0$. Las fórmulas (26) y la definición de $w_{out}(t)$ (39) implican

$$(119) \quad \dot{w}_{out}(t) = R(t), \quad t < 0.$$

Luego usando la ecuación reducida (37) y argumentando de manera análoga al caso $t > 0$ obtenemos que $\dot{y}(t) \in C(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d)$. Por lo tanto, $\dot{y}(t) \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$.

Mostremos que $\ddot{y}(t) \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$. Usando (118) tenemos que $\ddot{w}_{in}(t) = \dot{R}(t)$, $t > 0$, en donde $\dot{R}(t) = \frac{u_0''(t) + u_0''(-t)}{2} + \frac{v_0'(t) - v_0'(-t)}{2}$. De aquí vemos que $\ddot{w}_{in}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, dado que $u_0'', v_0' \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ (ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$). Además,

$$\frac{d}{dt}F(y(t)) = \nabla_y F(y(t)) \cdot \dot{y}(t) \in C(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d),$$

ya que $y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por Proposición 6.1.1 y (34), y $F(y) \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$. Ahora derivando la ecuación reducida (36) con respecto a t junto con la continuidad de $\frac{d}{dt}F(y(t))$ y $\ddot{w}_{in}(t)$ en \mathbb{R}_+ obtenemos que $\ddot{y}(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$.

Finalmente, $\ddot{w}_{out}(t) = \dot{R}(t)$, $t < 0$ en virtud (119), luego $\ddot{w}_{out}(t) \in C(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d)$, dado que $u_0'', v_0' \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ (ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$). Luego derivando la ecuación reducida (37) con respecto a t y usando la continuidad de $\frac{d}{dt}F(y(t))$ y $\ddot{w}_{in}(t)$ en \mathbb{R}_- obtenemos que $\ddot{y}(t) \in C(\mathbb{R}_-; \mathbb{R}^d)$. Y por consiguiente $\ddot{y}(t) \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$. Lema esta probado. \square

Corolario 9.4. $y(t \pm x) \in C^2(\{|x| \neq |t|\}; \mathbb{R}^d)$.

Notemos que en particular el Corolario anterior implica que $y(t \pm x) \in C^2(\{|x| < |t|\}; \mathbb{R}^d)$.

Lema 9.5. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Lema 9.3. Entonces existen los límites $\lim_{t \rightarrow \pm 0} \dot{y}(t)$.*

Demostración. Consideremos el caso $t \rightarrow 0+$. La ecuación reducida (36) implica que $\lim_{t \rightarrow +0} \dot{y}(t)$ existe si existen los límites de $F(y(t))$ y $\dot{w}_{in}(t)$ cuando $t \rightarrow 0+$. Como $\dot{w}_{in}(t) = R(t)$, entonces por la Definición 9.1 tenemos que $\lim_{t \rightarrow +0} \dot{w}_{in}(t)$ existe. Además como $F \in C^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ (ver condición (9)) e $y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ por (34) y por la Proposición 6.1.1, entonces $F(y(t)) \in C(\mathbb{R}_t; \mathbb{R}^d)$ luego $\lim_{t \rightarrow +0} F(y(t))$ también existe. Por lo tanto, se tiene la existencia de $\lim_{t \rightarrow +0} \dot{y}(t)$. El caso cuando $t \rightarrow 0-$ se demuestra de manera análoga, usando la ecuación reducida (37). \square

Denotemos por \mathbb{R}_c^2 a el conjunto $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0, x \neq \pm t\}$.

Teorema 9.6. *Sean $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ y $(u(x, t), v(x, t)) = Y(t)$ con $Y(0) = Y_0$. Entonces*

i) $u(x, t) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$,
ii) $u'(x, t)$, $\dot{u}(x, t)$, $u''(x, t)$ y $\ddot{u}(x, t)$ existen, coinciden con las derivadas clásicas y son localmente acotadas en $x \in \mathbb{R}_c^2$.

iii) Para todo $t \in \mathbb{R}$ los límites laterales
(120)

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^\pm} v(x, t), \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, t), \quad c) \lim_{x \rightarrow \pm t \pm 0} u'(x, t), \quad d) \lim_{x \rightarrow \pm t \pm 0} v(x, t)$$

existen.

Demostración. *i)* se sigue por Proposición 6.1.1 ya que $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ por la Definición 4.1.

Probemos la afirmación *ii)*. De la representación de D' Alembert (31) se sigue que las primeras y segundas derivadas parciales de $u(x, t)$ con respecto a x y t existen en el sentido clásico y son localmente acotadas en $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |t|\}$ (ya que $u_0, v_0 \in \mathcal{F}$). De esta forma hemos demostrado *ii)* en $|x| > |t|$.

Demostremos la aseveración *ii)* en la región $|x| < |t|$. Usando la representación (45), para $t > 0$, y las expresiones (26) obtenemos
(121)

$$u'(x, t) = \begin{cases} -y'(t-x) + \frac{u'_0(t+x)+u'_0(t-x)}{2} + \frac{v_0(t+x)+v_0(t-x)}{2}, & 0 < x < t, \\ y'(t+x) + \frac{u'_0(-t+x)+u'_0(-t-x)}{2} - \frac{v_0(-t+x)+v_0(-t-x)}{2}, & -t < x < 0. \end{cases}$$

Luego por el Corolario 9.4 y dado que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ obtenemos que $u'(x, t)$ existe y es localmente acotada en la región $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < t, x \neq 0\}$. Similarmente, usando la representación (48), para $t < 0$ y las expresiones (26) obtenemos

$$u'(x, t) = \begin{cases} y'(t+x) + \frac{u'_0(-t+x)+u'_0(-t-x)}{2} - \frac{v_0(-t+x)+v_0(-t-x)}{2}, & 0 < x < -t, \\ -y'(t-x) + \frac{u'_0(t-x)+u'_0(t+x)}{2} + \frac{v_0(t-x)+v_0(t+x)}{2}, & t < x < 0. \end{cases}$$

Luego por el Corolario 9.4 y dado que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ obtenemos que $u'(x, t)$ existe y es localmente acotada en la región $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid -|x| > t, x \neq 0\}$. De esta manera hemos mostramos que $u'(x, t)$ existe y es localmente acotada en $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |t|, x \neq 0\}$. Análogamente se demuestra que $\dot{u}(x, t)$ existe y es localmente acotada en la misma región. Finalmente la existencia de las derivadas parciales de orden 2, con respecto a x , de $u(x, t)$ en $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |t|, x \neq 0\}$, se obtiene del Corolario 9.4, (121) y (122), dado que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$. Se razona similarmente para justificar que $\ddot{u}(x, t)$ existe y es localmente acotada en $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |t|, x \neq 0\}$.

Probemos la afirmación *a*) de *iii*). Consideremos el primer límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t)$. La representación (45) para $u(x, t)$ y la fórmula para g_+ (ver 2da. expresión de (26)) implican para $0 < x < t$

$$(123) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \dot{u}(x, t) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\dot{y}(t-x) + \frac{1}{2} \left(-u'_0(t-x) - v_0(t-x) + u'_0(t+x) + v_0(t+x) \right) \right].$$

Ahora dado que $u'_0, v_0 \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ tenemos para $0 < t$, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-u'_0(t-x) - v_0(t-x) + u'_0(t+x) + v_0(t+x) \right)$ existe y por el Lema 9.3 obtenemos de (123) la existencia del límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t)$ para $0 < t$.

Analicemos el caso: $t < 0$. A partir de la representación (48) y la fórmula para f_+ (ver 1a. expresión de (26)) tenemos para $0 < x < -t$

$$(124) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \dot{u}(x, t) \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\dot{y}(t+x) + \frac{1}{2} \left(-u'_0(-t+x) + v_0(-t+x) + u'_0(-t-x) - v_0(-t-x) \right) \right].$$

Luego como $u'_0, v_0 \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R}^d)$ ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$ obtenemos para $t < 0$ que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-u'_0(-t+x) + v_0(-t+x) + u'_0(-t-x) - v_0(-t-x) \right)$ existe y por el Lema 9.3 obtenemos de (124) la existencia del límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t)$ para $t < 0$. De esta forma concluimos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x, t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

El límite lateral de $v(x, t)$ cuando $x \rightarrow 0^-$ se demuestra de manera similar, usando la expresión (45) de $u(x, t)$ para $x < 0$ y $0 < t$, y la fórmula (26) para f_- . Para $t < 0$ se usa la expresión (48) para $u(x, t)$ junto con la fórmula para g_- (ver fórmulas (26)), cuando $x < 0$ y $t < 0$. Finalmente analicemos el caso $t = 0$, es decir, $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} v(x, 0)$. La expresión

(31) para $t = 0$ implica

$$v(x, 0) = \frac{1}{2} [-u'_0(x) + u'_0(x) + v_0(x) + v_0(x)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

De aquí, por la condición 2 de la Definición 9.1 concluimos que existe $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} v(x, 0)$. El inciso *a*) de la afirmación *iii*) está probado.

Probemos el inciso *b*). Para ello analicemos el límite de $u'(x, t)$ cuando $x \rightarrow 0^\pm$. La expresión (121) para $t > 0$, el Lema 9.3 y la Definición

9.1 implican

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, t) = \mp y'(t) \pm u'_0(\pm t) + v_0(\pm t).$$

Similarmente, la expresión (122) para $t < 0$ implica

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, t) = \pm y'(t) + u'_0(\mp t) - v_0(\mp t).$$

De esta forma concluimos que existe $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, t)$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Finalmente analicemos el $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, 0)$. La expresión (31) para $t = 0$ implica

$$u'(x, 0) = \frac{1}{2}[u'_0(x) + u'_0(x) + v_0(x) - v_0(x)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

De aquí, por la condición 2 de la Definición 9.1 concluimos que existe $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} u'(x, 0)$. El inciso *b*) de la afirmación *iii*) esta probado.

Probemos el inciso *c*). Consideremos el caso $x \rightarrow t \pm 0$, el caso $x \rightarrow -t \pm 0$ se maneja similarmente. Mostremos la existencia de los límites $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t)$. Primero analizaremos dicho límite cuando $x \rightarrow t + 0$. La descomposición de D' Alembert (31) implica para $|x| > |t|$, $\pm t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t) = \lim_{x \rightarrow t \pm 0} \frac{1}{2}[u'_0(x+t) + u'_0(x-t) + v_0(x+t) - v_0(x-t)],$$

ya que $(u_0, v_0) \in \mathcal{F}$, entonces por la Definición 9.1 el último límite existe para $\pm t > 0$.

Ahora tratemos el $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t)$ si $\pm t < 0$. La representación (122) de $u'(x, t)$ para $|x| < |t|$ implica

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t) \\ &= \lim_{x \rightarrow t \pm 0} \left[-\dot{y}(t-x) + \frac{1}{2}(u'_0(t-x) + v_0(t-x) + u'_0(t+x) + v_0(t+x)) \right], \\ & \quad \quad \quad \pm t < 0. \end{aligned}$$

Luego por el Lema 9.5 y la Definición 9.1 el último límite existe para $\pm t < 0$.

Para $t = 0$ el límite $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t)$ también existe, en virtud del inciso *b*). Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} u'(x, t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$. El inciso *c*) de la afirmación *iii*) esta probado.

Mostremos el inciso *d*) considerando el caso $t > 0$ la situación $t < 0$ se maneja de forma similar. Demostremos la existencia del límite $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} v(x, t)$. Razonando análogamente al inciso *c*) (el caso $x \rightarrow \pm t$, $\pm t > 0$), usando la descomposición de D' Alembert (31) y la Definición 9.1 obtenemos la existencia de

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow t \pm 0} v(x, t) &= \lim_{x \rightarrow t \pm 0} \dot{u}(x, t) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow t \pm 0} [u'_0(x+t) - u'_0(x-t) + v_0(x+t) + v_0(x-t)], \quad \pm t > 0. \end{aligned}$$

Ahora trataremos el límite $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} v(x, t)$ cuando $\pm t < 0$. Usando argumentos análogos al inciso *c*) (el caso $x \rightarrow \pm t$, $\pm t < 0$) obtenemos de la representación (48) para $t < x < 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow t+0} v(x, t) &= \lim_{x \rightarrow t+0} \dot{u}(x, t) \\ &= \lim_{x \rightarrow t+0} \left[\dot{y}(t-x) + \frac{1}{2} \left(-u'_0(t-x) - v_0(t-x) + u'_0(t+x) + v_0(t+x) \right) \right]. \end{aligned}$$

Luego el Lema 9.5 y la Definición 9.1 implican la existencia del límite anterior cuando $\pm t < 0$. Para $t = 0$ este mismo límite también existe, en virtud del inciso *a*). Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow t \pm 0} v(x, t)$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$. El inciso *d*) de la afirmación *iii*) esta probado. \square

Corolario 9.7. $Y(t)$ es invariante sobre \mathcal{F} , es decir $Y(t) \in \mathcal{F}$ si $Y_0 \in \mathcal{F}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Lema 9.8. Sea $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{F}$, entonces

$$\begin{aligned} (\dot{u} + u')|_{x=t+0} &= (\dot{u} + u')|_{x=t-0}, \quad (\dot{u} - u')|_{x=-t-0} = (\dot{u} - u')|_{x=-t+0}, \\ &\text{for all } t \neq 0. \end{aligned}$$

Demostración. Probemos la primera igualdad. De la representación de D' Alembert (31) para $u(x, t)$, las fórmulas (26) y la Definición 9.1 obtenemos

$$(\dot{u} + u')|_{x=t+0} = \left[u'_0(x+t) + v_0(x+t) \right]_{x=t+0} = u'(2t) + v(2t), \quad \forall t \neq 0.$$

Ahora usando la representación (45), las fórmulas (26) y la Definición 9.1 obtenemos

$$(\dot{u} + u')|_{x=t-0} = \left[u'_0(x+t) + v_0(x+t) \right]_{x=t-0} = u'(2t) + v(2t), \quad \forall t \neq 0.$$

La primera identidad esta probada en virtud de las expresiones anteriores. La otra identidad se muestra de manera similar. \square

Lema 9.9. Sea $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) := \{\varphi \in C^\infty \mid \varphi'(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$. El conjunto $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{E}$ es denso en $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$.

Demostración. Sea $(u, v) \in \mathcal{E}$ y $\epsilon > 0$. Es conocido que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$ (véase [22, página 80]). Luego existe $\psi, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tales que

$$(125) \quad \|v - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \|u' - \phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Definimos $\varphi(x) := \int_0^x \phi(\xi) d\xi + u(0)$, claramente $(\varphi, \psi) \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Entonces

$$\begin{aligned} \|(u - \varphi, v - \psi)\|_{\mathcal{E}} &= \|u' - \varphi'\|_{L^2(\mathbb{R})} + |u(0) - \varphi(0)| + \|v - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|u' - \phi\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

□

Definimos el conjunto

$$(126) \quad \mathcal{K} := \left\{ (u, v) \in \mathcal{E} \mid \exists K_{\pm}, R \in \mathbb{R} \text{ tal que } u(x) = K_{\pm}, v(x) = 0, \text{ para } \pm x > R \right\}.$$

Lema 9.10. El conjunto $\mathcal{F} \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ es denso en $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$.

Demostración. Obviamente $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{K}$. Es fácil ver que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$, ya que $u(x), v(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Entonces, $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$. Luego la Proposición 9.9 implica que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R})$ es denso en $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$, por lo tanto, $\mathcal{F} \cap \mathcal{K} \subset \mathcal{E}$ es denso en $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$. □

Lema 9.11. La trayectoria $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ es invariante en $\mathcal{F} \cap \mathcal{K}$, es decir, $Y(t) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ si $Y_0 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$.

Demostración. Sea $(u_0, v_0) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$, entonces la fórmula de D' Alembert (31) implica que $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{K}$. Además, $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{F}$ por Corolario 9.7. □

Demostración del Teorema 5.1, 3 (Conservación de la energía del sistema de Lamb) Para $t \geq 0$, escribimos

$$(127) \quad \begin{aligned} (\mathcal{H}(Y_0))(t)(u_0, v_0) &= \mathcal{H}(Y(t))(u_0, v_0) \\ &:= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[|\dot{u}(x, t)|^2 + |u'(x, t)|^2 \right] dx + V(u(0, t)), \end{aligned}$$

en donde, $(u(x, t), v(x, t)) = Y(t)$ y $Y(0) = Y_0$.

Notemos que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) : (u_0, v_0) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua de \mathcal{E} en \mathbb{R} , ya que $u'_0(x, 0), v_0(x, 0) \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ y la transformación $U(t)$ del Teorema 5.1 punto 2, es continua de $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. Además,

$$(128) \quad (\mathcal{H}(Y_0))(t) \in C(\mathbb{R}),$$

ya que $Y(t) \in C(\mathbb{R}; \mathcal{E})$ por Teorema 5.1, punto 1.

Demostremos que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) = \text{const}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ con $Y_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$. Consideremos la integral “energética” de la cuerda del sistema de Lamb

$$(129) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} [|\dot{u}(x, t)|^2 + |u'(x, t)|^2] dx.$$

Notemos que de (127) se sigue que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) = E(t) + V(u(0, t))$. Dividimos la integral energética en

$$(130) \quad \begin{aligned} E(t) &= \int_{-\infty}^{-t} \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx + \int_{-t}^0 \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx \\ &+ \int_0^t \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx + \int_t^{+\infty} \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx. \end{aligned}$$

Demostremos que existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) := E(t) + V(u(0, t)) = H$ para todo $t \geq 0$ y para todo $(u_0, v_0) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$.

Diferenciando con respecto de $t > 0$ los primeros dos sumando de (130) y usando la fórmula de Leibniz para derivar integrales que dependen de un parámetro obtenemos

$$(131) \quad \begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{-t} \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx + \int_{-t}^0 \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] dx \right] \\ &= \int_{-\infty}^{-t} [\dot{u}(x, t)u''(x, t) + u'(x, t)u'(x, t)] dx + \int_{-t}^0 [\dot{u}(x, t)u''(x, t) + u'(x, t)u'(x, t)] dx \\ &- \frac{1}{2} [(\dot{u}(-t-0, t))^2 + (u'(-t-0, t))^2] + \frac{1}{2} [(\dot{u}(-t+0, t))^2 + (u'(-t+0, t))^2]. \end{aligned}$$

Usando la primera ecuación de (1) (la cual es satisfecha para $u(x, t)$ en el sentido clásico para $x \neq 0$ y $x \neq \pm t$, por Teorema 9.6 *ii*) tenemos

que

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-t} [\dot{u}(x, t)u''(x, t) + u'(x, t)\dot{u}'(x, t)]dx + \int_{-t}^0 [\dot{u}(x, t)u''(x, t) + u'(x, t)\dot{u}'(x, t)]dx \\ &= \int_{-\infty}^{-t} [\dot{u}(x, t)\ddot{u}(x, t) + u'(x, t)\dot{u}'(x, t)]dx + \int_{-t}^0 [\dot{u}(x, t)\ddot{u}(x, t) + u'(x, t)\dot{u}'(x, t)]dx. \end{aligned}$$

Ahora una integración por partes en esta última igualdad nos da que el lado izquierdo de (131) es igual a

$$(132) \quad \begin{aligned} & \left[u'(x, t)\dot{u}(x, t) \right]_{-\infty}^{-t-0} + \left[u'(x, t)\dot{u}(x, t) \right]_{-t+0}^{0-} \\ & - \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(-t-0, t))^2 + (u'(-t-0, t))^2 \right] + \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(-t+0, t))^2 + (u'(-t+0, t))^2 \right]. \end{aligned}$$

En forma análoga, para los últimos dos sumandos de (130) obtenemos

$$(133) \quad \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \left[\frac{[-\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[-u'(x, t)]^2}{2} \right] dx + \int_t^{+\infty} \left[\frac{[-\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[-u'(x, t)]^2}{2} \right] dx \right] \\ &= \left[u'(x, t)\dot{u}(x, t) \right]_{0+}^{t-0} + \left[u'(x, t)\dot{u}(x, t) \right]_{t+0}^{+\infty} - \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(t+0, t))^2 + (u'(t+0, t))^2 \right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(t-0, t))^2 + (u'(t-0, t))^2 \right]. \end{aligned}$$

De esta forma

$$(134) \quad \begin{aligned} \dot{E}(t) &= \left[u'(x, t)\dot{u}(x, t) \right]_{-\infty}^{-t-0} + \left[u'(x, t)\dot{u}(x, t) \right]_{-t+0}^{0-} + \left[u'(x, t)\dot{u}(x, t) \right]_{0+}^{t-0} \\ &+ \left[u'(x, t)\dot{u}(x, t) \right]_{t+0}^{+\infty} - \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(-t-0, t))^2 + (u'(-t-0, t))^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(-t+0, t))^2 + (u'(-t+0, t))^2 \right] - \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(t+0, t))^2 + (u'(t+0, t))^2 \right] \\ & \quad + \frac{1}{2} \left[(\dot{u}(t-0, t))^2 + (u'(t-0, t))^2 \right]. \end{aligned}$$

Definiendo

$$(135) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\pm}(x, t) &:= \pm \left[\frac{[\dot{u}(x, t)]^2}{2} + \frac{[u'(x, t)]^2}{2} \right] + u'(x, t)\dot{u}(x, t) \\ &= \pm \frac{1}{2} |\dot{u}(x, t) \pm u'(x, t)|^2, \quad t > 0, \end{aligned}$$

obtenemos por (134)

$$(136) \quad \dot{E}(t) = \Gamma_-(x, t) \Big|_{x=-t+0}^{x=-t-0} + \dot{u}(x, t)u'(x, t) \Big|_{x=0+}^{x=0-} + \Gamma_+(x, t) \Big|_{x=t+0}^{x=t-0},$$

ya que $u(x, t), v(x, t) \in \mathcal{K}$. Luego se sigue del Lema 9.8

$$(137) \quad \Gamma_{\pm}(x, t) \Big|_{x=\pm t+0}^{x=\pm t-0} = 0, \quad t > 0,$$

dado que $(u(x, t), v(x, t)) \in \mathcal{F}$.

Ahora la continuidad de $u(x, t)$ (véase Teorema 9.6 *i*) y la expresión (34) implican que $\dot{u}(0+, t) = \dot{u}(0-, t) = \dot{u}(0, t) = \dot{y}(t)$. De esta forma la segunda ecuación de (1) (la cual se satisface para $u(x, t)$ en el sentido clásico, para $x \neq 0$ y $x \neq \pm t$ (véase Teorema 9.6 *ii*)) y el caracter conservativo de F (véase (9)) implican

$$(138) \quad \begin{aligned} \dot{u}(x, t)u'(x, t) \Big|_{x=0+}^{x=0-} &= \dot{u}(0-, t)u'(0-, t) - \dot{u}(0+, t)u'(0+, t) \\ &= -\dot{u}(0, t)[u'(0+, t) - u'(0-, t)] \\ &= -\dot{y}\nabla V(y) = -\frac{d}{dt}V(y(t)), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Luego se sigue de (136)-(138) que

$$(\dot{\mathcal{H}}(Y_0))(t) = \dot{E}(t) + \frac{d}{dt}V(y(t)) = 0, \quad t > 0.$$

Esto implica que existe $H \in \mathbb{R}$ tal que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) = H, t > 0, Y_0 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$. Ahora usando la continuidad de $(\mathcal{H}(Y_0))(t)$ con respecto de $t \in \mathbb{R}$ obtenemos que $(\mathcal{H}(Y_0))(0+) = H$. Por lo tanto,

$$(\mathcal{H}(Y_0))(t) = H, \quad t \geq 0.$$

El caso $t \leq 0$ se maneja de forma análoga. De esta manera demostramos que $(\mathcal{H}(Y_0))(t) = \text{const}, t \in \mathbb{R}, Y_0 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{K}$. Nos falta mostrar que esto mismo se cumple para $Y_0 \in \mathcal{E}$.

El siguiente diagrama esquematiza el paso final de la prueba:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} \cap \mathcal{K} & \xrightarrow{U(t)} & \mathcal{F} \cap \mathcal{K} & \xrightarrow{\mathcal{H}(t)} & \mathbb{R} \\ & & \downarrow \cap\text{-denso} & \nearrow (\mathcal{H} \circ U)(t) & \\ & & \mathcal{E} & & \end{array}$$

Recordemos que $\mathcal{H} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua por (12) y la definición de la topología de \mathcal{E} . Por lo tanto, $\mathcal{H}(Y(t))(u_0, v_0) = \text{const}$ para $(u_0, v_0) \in \mathcal{E}$, por el Lema 9.10, la continuidad de $U(t)$ (véase Teorema 9.6 *ii*) y la invarianza de $U(t)$ en $\mathcal{F} \cap \mathcal{K}$ (véase Lema 9.11). \square

10. Acotamiento de las soluciones de energía finita del sistema de Lamb

En esta última sección se demuestra que todas las soluciones de energía finita del sistema de Lamb están acotadas para todo $t \in \mathbb{R}$, con respecto a la topología dada sobre el espacio de fases \mathcal{E} .

Demostración del Teorema 5.1, 4 (Estimación a priori del sistema de Lamb) Demostraremos la estimación a priori (14) para $t \geq 0$. Sea $Y(t) \in \mathcal{E}$, por la definición de norma en \mathcal{E}

$$(139) \quad \|Y(t)\|_{\mathcal{E}} = \|u'(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + |u(0, t)| + \|v(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)}.$$

Tenemos dos casos: 1) $|x| \geq |t|$. Las fórmulas (86), la definición del espacio \mathcal{E} y un cambio de variable (en el sentido de Lebesgue) implican que existe $C_1 > 0$ tal que

$$(140) \quad \|u'(x, t)\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} + \|v(x, t)\|_{L^2(R_t; \mathbb{R}^d)} \leq C_1, \quad t \geq 0,$$

en donde R_t esta definido en (85).

2) $|x| < |t|$. Las fórmulas (88), (89) y (26), la definición del espacio \mathcal{E} , un cambio de variable (en el sentido de Lebesgue) y la cota a priori (68) implican que existe $C_2 > 0$ tal que

$$(141) \quad \|u'(x, t)\|_{L^2((-t, t); \mathbb{R}^d)} + \|v(x, t)\|_{L^2((-t, t); \mathbb{R}^d)} \leq C_2, \quad t \geq 0.$$

Ahora (140) y (141) implican que existe $C > 0$ tal que

$$(142) \quad \|u'(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} + \|v(x, t)\|_{L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)} \leq C, \quad t \geq 0.$$

Nuevamente por (34) y la estimación a priori (68) obtenemos a partir de (139) la estimación (14) para $t \geq 0$.

El caso $t \leq 0$ se demuestra de manera análoga, usando las representaciones adecuadas de $u(x, t)$ en $|x| \geq |t|$ y $|x| < |t|$, cuando $t < 0$. \square

A. La descomposición de D' Alembert en la clase de distribuciones $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}^d)$

Las demostraciones de los resultados de esta sección se pueden consultar en [21, Capítulo 2] y usan básicamente la teoría de distribuciones y un análisis detallado de las bien conocidas fórmulas de D' Alembert pero en el sentido distribucional.

Definición A.1. Sea $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, una transformación lineal definida por

$$(143) \quad \psi(x, t) = (x - t, x + t);$$

con función inversa $\psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$(144) \quad \psi^{-1}(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi + \eta, -\xi + \eta).$$

Claramente tenemos

$$(145) \quad |J_\psi| = 2 \quad \text{y} \quad |J_{\psi^{-1}}| = \frac{1}{2},$$

en donde, $|J|$ denota el jacobiano de una transformación lineal.

Los símbolos Π_+ y Π_- denotarán a los semi planos derecho e izquierdo respectivamente. Es decir,

$$(146) \quad \Pi_\pm := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm x > 0 \right\}.$$

La imagen de Π_+ bajo ψ será denotada por Σ_+ ,

$$\Sigma_+ = \psi[\Pi_+] = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \eta > -\xi\}.$$

Lema A.2. Sea $w(\xi, \eta) \in \mathcal{D}'(\Sigma_+; \mathbb{R}^d)$ y

$$\partial_\eta(w(\xi, \eta)) = 1(\xi) \otimes r(\eta),$$

en donde, $r(\eta) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\eta; \mathbb{R}^d)$. Entonces

1) existen $f_+(\xi) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^d)$ y $g_+(\eta) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\eta; \mathbb{R}^d)$ tales que

$$(147) \quad w(x, t) := w(\xi, \eta) \circ \psi(x, t)$$

con $\psi(x, t)$ definida por (143), se representa en la forma siguiente:

$$(148) \quad w(x, t) = f_+(x - t) + g_+(x + t),$$

en donde,

$$(149) \quad \begin{aligned} f_+(x - t) &:= (f_+(\xi) \otimes 1(\eta)) \circ \psi(x, t), \\ g_+(x + t) &:= (1(\xi) \otimes g_+(\eta)) \circ \psi(x, t). \end{aligned}$$

2) Si $\overline{f_+} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\xi; \mathbb{R}^d)$, $\overline{g_+} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_\eta; \mathbb{R}^d)$ es otra pareja de distribuciones que satisface (148), entonces existe una constante $C_+ \in \mathbb{R}$ tal que

$$(150) \quad \overline{f_+} = f_+ - C_+, \quad \overline{g_+} = g_+ + C_+.$$

Observación A.3. Notemos que la identidad (148) se extiende de Σ_+ a todo \mathbb{R}^2 .

Ahora podemos enunciar el teorema sobre la descomposición de D' Alembert en $\mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$.

Teorema A.4. [21, Capítulo 2] a) Si $u \in \mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$, entonces las afirmaciones 1 y 2 son equivalentes:

1.

$$(151) \quad \square u(x, t) = 0, \quad \text{sobre } \Pi_{\pm}.$$

2. Existen $f_{\pm}, g_{\pm} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tal que (148) se cumple.

3. b) Además, sea $u(x, t)$ que admite el desarrollo (148). Si $\bar{f}_{\pm}, \bar{g}_{\pm} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ son tales que

$$(152) \quad u(x, t) = \bar{f}_{\pm}(x - t) + \bar{g}_{\pm}(x + t), \quad \text{en } \Pi_{\pm},$$

entonces existen $C_{\pm} \in \mathbb{R}$ tal que

$$(153) \quad \bar{f}_{\pm} = f_{\pm} - C_{\pm}, \quad \bar{g}_{\pm} = g_{\pm} + C_{\pm}.$$

A continuación enunciaremos algunas propiedades especiales de las funciones f_{\pm}, g_{\pm} que aparecen en (148) bajo ciertas hipótesis sobre $u(x, t)$.

Lema A.5. Sea $v(\xi, \eta) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d)$ y supongamos que existen $p_{\pm}, q_{\pm} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ tales que

$$(154) \quad v(\xi, \eta) = p_{\pm}(\xi) \otimes 1(\eta) + 1(\xi) \otimes q_{\pm}(\eta), \quad (\xi, \eta) \in \Sigma_{\pm}.$$

Entonces, se cumplen las siguientes implicaciones

- i) $v(\xi, \eta) \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d) \implies p, q \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$,
- ii) Si $v(\xi, \eta) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d) \implies p, q \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Corolario A.6. Sea $u(x, t) \in \mathcal{D}'(\Pi_{\pm}; \mathbb{R}^d)$ y supongamos que existen $f_{\pm}, g_{\pm} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que se cumple (148) en $(x, t) \in \Pi_{\pm}$. Entonces, se tienen las siguientes implicaciones

- i) $u \in C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d) \implies f_{\pm}, g_{\pm} \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$,
- ii) si $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^d) \implies f_{\pm}, g_{\pm} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$.

Agradecimientos

El autor expresa su profundo agradecimiento a Dios, a su familia, al Dr. Anatoli E. Merzon y al CONACyT por su gran apoyo en esta investigación.

Marco Antonio Taneco Hernández
Instituto de Física y Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo,
Ciudad Universitaria, S/N, 58060,
Morelia, Michoacán, México, Edificio C-3,
Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM,
Apartado Postal 61-3 (Xangari), 58089,
Morelia, Michoacán, México,
math23@ifm.umich.mx and mtaneco@matmor.unam.mx

Referencias

- [1] Adams R.A., Sobolev Spaces, Press, Inc. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1978.
- [2] Arnold V.I., Ordinary Differential Equations, translated from the third Russian edition by Roger Cooke, Springer Textbook, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [3] DiBenedetto E., Real Analysis, Birkhäuser, Boston, 2002.
- [4] Bertini M.; Noja D.; Posilicano A., *Dynamics and Lax-Phillips scattering for generalized Lamb models*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** No.49 (2008), 15173–15195.
- [5] Bloch A.M.; Hagerty P.; Weinstein M.I., *Radiation induced instability*, SIAM J. Appl. Math. **4** No.2 (2003), 484–524.
- [6] Brézis H., Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones, traducción al Castellano por Juan Ramón Esteban, Alianza Editorial S.A., Madrid, 1984.
- [7] Friedlin M.; Komech A.I., *On metastable regimes in stochastic Lamb system*, J. Math. Phys. **47** No.4 (2006), 043301, 12pp.
- [8] Hsieh P.; Sibuya Y., Basic Theory of Ordinary Differential Equations, Universitext, Springer-Verlag, 1991.
- [9] Jackson J.D., Classical Electrodynamics, Wiley and Sons Inc., New York, 1998.

- [10] Keller J.B.; Bonilla L.L., *Irreversibility and non-recurrence*, J. Statist. Phys. **42** No.5-6 (1986), 1115–1125.
- [11] Komech A.I., *On the stabilization of interaction of a string with a nonlinear oscillator*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh **6** (1991), 35–41.
- [12] Komech A., *On the stabilization of string-oscillator interaction*, J. Russian Math. Phys. **3** (1992), 227–247.
- [13] Komech A.I., *On stabilization of string-nonlinear oscillator interaction*, J. Math. Anal. Appl. **196** (1995), 384–409.
- [14] Komech A., *On transitions to stationary states in Hamiltonian nonlinear wave equations*, Physics Letters A **241** (1998), 311–322.
- [15] Komech A., *Attractors of non-linear Hamiltonian one-dimensional wave equations*, Russ. Math. Surv. **55** No.1 (2000), 43–92.
- [16] Komech A.I.; Merzon A.E., *Scattering in the nonlinear Lamb system*, Physics Lett. A **373** (2009), 1005–1010.
- [17] Ladyzhenskaya O.A., *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Applied Mathematical Sciences, **49**, Springer-Verlag New York, 1985.
- [18] Lamb H., *On a peculiarity of the wave-system due to the free vibrations of a nucleus in an extended medium*, Proc. London Math. Soc. **32** (1900), 208–211.
- [19] Merzon A.E.; Taneco-Hernández M.A., *Scattering in the Zero-mass Lamb System*, Physics Letters A **372** (2008), 4761–4767.
- [20] Soffer, A., *Dissipation through dispersion*, In: Nonlinear Dynamics and Renormalization Group, CRM Proc. Lecture Notes **27**, American Mathematical Society 2001, 175–184.
- [21] Taneco-Hernández M.A., *Dispersión no lineal del sistema de Lamb con masa cero*, tesis doctoral, UMSNH-UNAM Morelia Michoacán, México, 2010.
- [22] Vladimirov V.S., *Equations of Mathematical Physics*, Mir Publishers Moscow, 1984.

