

# Álgebra $C^*$ generada por operadores de Toeplitz con símbolos discontinuos en el espacio de Bergman armónico \*

Maribel Loaiza      Carmen Lozano

## Resumen

Sea  $\ell$  una curva simple suave en el disco unitario complejo  $\mathbb{D}$ . En este trabajo estudiamos el álgebra de Calkin del álgebra  $C^*$  generada por operadores de Toeplitz que actúan en el espacio de Bergman armónico de  $\mathbb{D}$ , cuyos símbolos son funciones continuas en  $\mathbb{D} \setminus \ell$ . El resultado principal e inesperado es que el espectro de un operador de Toeplitz cuyo símbolo es una función constante a trozos depende del ángulo de discontinuidad.

*2010 Mathematics Subject Classification:* 31A05, 32A10, 32A36, 47L80.

*Keywords and phrases:* función armónica, espacios de Berman, álgebras  $C^*$ , proyecciones de Bergman, anti-Bergman, operador de Toeplitz.

## 1 Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar el álgebra  $C^*$  generada por operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman armónico del disco unitario complejo. Existen numerosos trabajos sobre operadores de Toeplitz con símbolo continuo y continuo a trozos actuando en el espacio de Bergman del disco unitario, entre ellos [15].

Con respecto a operadores de Toeplitz actuando en el espacio de Bergman armónico, en [7] se demuestra que, módulo los operadores

---

\*Trabajo basado en la tesis de Carmen Lozano, dirigida por Maribel Loaiza, presentada como requisito para la obtención del grado de Maestría en Ciencias con especialidad en Matemáticas del CINVESTAV-IPN el 25 de enero de 2010.

compactos, el álgebra  $C^*$  generada por los operadores de Toeplitz, con símbolo continuo es isomorfa al álgebra de funciones continuas en la frontera de  $\mathbb{D}$ . Un hecho muy conocido es que este mismo resultado es válido cuando los operadores de Toeplitz actúan en el espacio de Bergman.

En general, el comportamiento de los operadores de Toeplitz depende del espacio donde éstos actúan. Uno de los resultados importantes que se tienen es que el índice de un operador de Toeplitz actuando en el espacio de Bergman depende del número de vueltas que su símbolo da al cero. Por otro lado, si estos operadores actúan en el espacio de Bergman armónico, tienen siempre índice cero como se demuestra en [7]. Más aun, en este trabajo, demostramos que si el símbolo de un operador de Toeplitz es continuo a trozos, su índice es también cero.

Otra de las diferencias importantes entre los operadores de Toeplitz actuando en el espacio de Bergman con respecto a los mismos actuando en el espacio de Bergman armónico es el exhibido en el Corolario 3.9. En este corolario se muestra que el espectro de un operador de Toeplitz con símbolo continuo a trozos depende del ángulo de discontinuidad en la frontera del disco.

En este trabajo se toma como base los artículos [6] y [9]. En el primer artículo se estudia el álgebra  $C^*$  generada por los operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos, la proyección de Bergman y la proyección anti-Bergman y; en el segundo, se estudia el álgebra  $C^*$  generada por los operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos y la proyección armónica.

## 2 Preliminares

A lo largo de este trabajo  $\mathbb{D}$  denotará al disco unitario abierto en el plano complejo  $\mathbb{C}$ , es decir,  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  y  $\mathbb{T}$  denotará su frontera  $\partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Para  $z = x + iy$ ,  $dm(z) = \frac{1}{\pi}dxdy$  es la medida de Lebesgue normalizada en  $\mathbb{D}$ . El espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  del disco  $\mathbb{D}$  es el espacio de funciones analíticas de  $L_2(\mathbb{D})$  y  $\tilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D}) = \{\bar{f} : f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})\}$ , el espacio anti-Bergman, es el espacio de todas las funciones anti-analíticas de  $L_2(\mathbb{D})$ . Los espacios de Bergman y anti-Bergman son subespacios cerrados de  $L_2(\mathbb{D}) = L_2(\mathbb{D}, dm)$  y por lo tanto son espacios de Hilbert.

La función evaluación puntual definida en  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  es una función continua. Por el Teorema de Representación de Riesz existe un único elemento  $k_z \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$  tal que

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \overline{k_z(\zeta)} dm(\zeta).$$

La función  $K(z, \zeta) = \overline{k_z(\zeta)}$  se llama el núcleo de Bergman de  $\mathbb{D}$  y tiene la propiedad reproductora:

$$f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) K(z, \zeta) dm(\zeta),$$

para toda  $f \in \mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . El núcleo reproductor de Bergman es una función simétrica hermitiana (vea por ejemplo [16]) y su fórmula es

$$K(z, \zeta) = \frac{1}{(1 - z\bar{\zeta})^2}.$$

La proyección ortogonal de  $L_2(\mathbb{D})$  sobre  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ , denotada aquí por  $B_{\mathbb{D}}$ , se llama la proyección de Bergman y está dada por la fórmula integral

$$(B_{\mathbb{D}}f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1 - z\bar{\zeta})^2} dm(\zeta).$$

Por otro lado, la función núcleo anti-Bergman para el caso del disco  $\mathbb{D}$  está dada por la expresión

$$\tilde{K}(z, \zeta) = \frac{1}{(1 - \bar{z}\zeta)^2}.$$

La proyección ortogonal de  $L_2(\mathbb{D})$  sobre  $\tilde{\mathcal{A}}^2(\mathbb{D})$  se representa en forma integral por

$$(\tilde{B}_{\mathbb{D}}f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} dm(\zeta).$$

Una función  $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  se llama armónica si sus segundas derivadas parciales existen, son continuas y su Laplaciano es cero; esto es,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad z = x + iy.$$

El espacio de Bergman armónico  $b^2(\mathbb{D})$  es el conjunto de todas las funciones armónicas complejas  $u$  en  $\mathbb{D}$  para las cuales

$$\|u\|_2 = \left( \int_{\mathbb{D}} |u(\zeta)|^2 dm(\zeta) \right)^{1/2} < \infty.$$

El espacio  $b^2(\mathbb{D})$  es un subespacio cerrado de  $L_2(\mathbb{D})$  y por lo tanto es un espacio de Hilbert. Además cada evaluación puntual es un funcional lineal acotado en  $b^2(\mathbb{D})$ ; vea por ejemplo [1]. Por lo tanto existe una única función  $R(z, \cdot)$  en  $b^2(\mathbb{D})$  la cual satisface la propiedad:

$$u(z) = \int_{\mathbb{D}} u(\zeta) \overline{R(z, \zeta)} dm(\zeta), \quad (z \in \mathbb{D})$$

para todo  $u \in b^2(\mathbb{D})$ . El núcleo reproductor armónico  $R(z, \cdot)$  es real y simétrico. También podemos ver que  $b^2(\mathbb{D}) \cap L_\infty(\mathbb{D})$  es denso en  $b^2(\mathbb{D})$ . Sea  $Q$  la correspondiente proyección ortogonal del espacio de Hilbert  $L_2(\mathbb{D})$  en  $b^2(\mathbb{D})$ . La proyección de Bergman armónica  $Q$  tiene la representación

$$(1) \quad Q = B_{\mathbb{D}} + \tilde{B}_{\mathbb{D}} + T,$$

donde  $T$  es el operador unidimensional dado por la fórmula

$$(Tf)(z) = - \int_{\mathbb{D}} f(w) dm(w).$$

Para una función  $a \in L_\infty(\mathbb{D})$  definimos el operador de Toeplitz con símbolo  $a$ ,  $T_a : b^2(\mathbb{D}) \rightarrow b^2(\mathbb{D})$  mediante la fórmula

$$T_a(u) = Q(au).$$

A continuación enunciamos algunas propiedades, cuyas demostraciones son inmediatas, que cumplen los operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman armónico.

**Teorema 2.1.** Sean  $a, b \in L_\infty(\mathbb{D})$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , entonces

$$(i) \quad \|T_a\|_2 \leq \|a\|_\infty,$$

$$(ii) \quad T_{\alpha a + \beta b} = \alpha T_a + \beta T_b,$$

$$(iii) \quad T_a^* = T_{\bar{a}}.$$

Actualmente existen varias técnicas de localización en teoría de operadores. Uno de los trabajos pioneros en esta área fue realizado por Simonenko ([12]) en 1965. En este trabajo se introduce la noción de operadores localmente equivalentes y se desarrolla lo que posteriormente se conocería como principio local de Simonenko. En el estudio de este campo surge el desarrollo de varios principios locales, entre ellos, el principio local de Douglas-Varela ([14]). En él se establece la representación de un álgebra  $C^*$  como el espacio de secciones continuas de un haz  $C^*$ .

Una propiedad muy importante de los operadores de Toeplitz con símbolo continuo, actuando en  $b^2(\mathbb{D})$ , es que el conmutador y el semiconmutador de cada par de este tipo de operadores es compacto (vea por ejemplo [2], [5] y [10]). Esto nos permite utilizar el principio local de Douglas-Varela, usando como subálgebra central al álgebra generada por los operadores de Toeplitz con símbolo continuo. Como es usual  $C(\overline{\mathbb{D}})$  denota al álgebra de las funciones continuas en  $\overline{\mathbb{D}}$ .

**Teorema 2.2** ([2], [10]). *Sean  $a, b \in C(\overline{\mathbb{D}})$ , entonces el conmutador  $[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a$  y el semiconmutador  $[T_a, T_b] = T_{ab} - T_a T_b$  son compactos en  $b^2(\mathbb{D})$ .*

El teorema que presentamos a continuación es muy importante en el estudio del álgebra  $C^*$  generada por operadores de Toeplitz. Pues nos dice que el ideal de operadores compactos contiene a los operadores de Toeplitz cuyo símbolo se anula en la frontera del disco unitario complejo.

**Teorema 2.3** ([2], [10]). *Si  $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$ , entonces  $T_a$  es compacto en  $b^2(\mathbb{D})$  si y sólo si la restricción  $a|_{\mathbb{T}} \equiv 0$ .*

El siguiente resultado describe la relación que hay entre los símbolos armónicos de dos operadores de Toeplitz que conmutan.

**Teorema 2.4** ([3]). *Sean  $u, v \in b^2(\mathbb{D})$  funciones no constantes. Entonces  $T_u T_v = T_v T_u$  en  $b^2(\mathbb{D})$  si y sólo si  $v = \alpha u + \beta$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .*

## 2.1 Las proyecciones de Bergman y anti-Bergman en el semiplano superior.

Consideremos el semiplano superior  $\Pi$  con la medida de área  $dz = dx dy$ ,  $z = x + iy$ . Como es usual  $L_2(\Pi)$  denota al espacio de todas las funciones medibles cuadrado integrables en  $\Pi$ . El correspondiente espacio de Bergman de todas las funciones analíticas de  $L_2(\Pi)$  se denotará por

$\mathcal{A}^2(\Pi)$ . La proyección ortogonal de  $L_2(\Pi)$  en  $\mathcal{A}^2(\Pi)$  se denota por  $B_\Pi$ . Análogamente,  $\tilde{\mathcal{A}}^2(\Pi)$  denota al subespacio de  $L_2(\Pi)$  formado por las funciones anti-analíticas y  $\tilde{B}_\Pi$  a la proyección ortogonal de  $L_2(\Pi)$  sobre  $\tilde{\mathcal{A}}^2(\Pi)$ , llamada proyección anti-Bergman (ver [13]). En coordenadas polares tenemos la descomposición:

$$(2) \quad L_2(\mathbb{R}^2, dx dy) = L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes L^2(\mathbb{T}, d\omega),$$

donde  $d\omega$  es la medida de longitud de arco en  $\mathbb{T}$ .

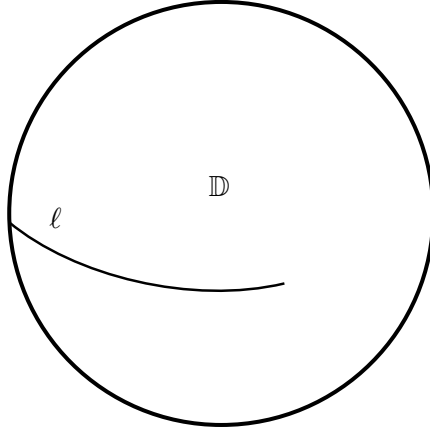


Figura 1: La curva  $\ell$  en el disco unitario  $\mathbb{D}$ .

Sea  $\ell$  una curva simple suave a trozos en el disco unitario cerrado  $\overline{\mathbb{D}}$ . Sea  $t_0$  el punto donde la curva  $\ell$  interseca a  $\mathbb{T}$ . Denotemos por  $PC(\overline{\mathbb{D}}, \ell)$  al conjunto de todas las funciones  $a(z)$ , continuas en  $\overline{\mathbb{D}} \setminus \ell$  que tienen límite por la derecha y por la izquierda en  $t_0$ , éstos serán denotados por  $a^+(t_0)$  y  $a^-(t_0)$  respectivamente.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $t_0 = -1$ . Consideremos el operador  $W_\phi : L_2(\mathbb{D}) \rightarrow L_2(\Pi)$ , dado por la regla de correspondencia

$$(3) \quad (W_\phi f)(z) = f \circ \phi^{-1}(z) \phi_z^{-1}(z),$$

donde  $\phi(z) = i \frac{z+1}{1-z}$  transforma a  $\mathbb{D}$  en  $\Pi$  y  $\phi_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$ . Es fácil comprobar que  $W_\phi$  es un operador unitario, autoadjunto y por tanto una isometría

lineal. Consideremos también el operador unitario  $V : L_2(\Pi) \rightarrow L_2(\Pi)$  definido por  $V = h(z)I$ , donde

$$(4) \quad h(z) = \left( \frac{z+i}{\bar{z}-i} \right)^2.$$

**Proposición 2.5** ([6], [11]).  $B_{\mathbb{D}}$  es unitariamente equivalente a  $B_{\Pi}$  y  $\tilde{B}_{\mathbb{D}}$  es unitariamente equivalente a  $V^* \tilde{B}_{\Pi} V$ .

Para una función operador-valuada

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{B}(L_2(\mathbb{T})), \\ \lambda &\mapsto L(\lambda), \end{aligned}$$

denotaremos por  $I \otimes_{\lambda} L(\lambda)$  al operador en  $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}) \otimes L_2(\mathbb{T}))$  dado por la fórmula

$$[(I \otimes_{\lambda} L(\lambda))f](\lambda, t) = [L(\lambda)f(\lambda, \cdot)](t), (\lambda, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}.$$

El siguiente teorema proporciona una descomposición de  $B_{\Pi}$  y  $\tilde{B}_{\Pi}$  en términos de operadores unidimensionales. Denotaremos por  $\mathbb{T}_+$  a la intersección  $\mathbb{T} \cap \Pi$ .

**Teorema 2.6** ([8]). *Los operadores  $B_{\Pi}$  y  $\tilde{B}_{\Pi}$  son unitariamente equivalentes a las familias de operadores  $I \otimes_{\lambda} B(\lambda)$  e  $I \otimes_{\lambda} \tilde{B}(\lambda)$  respectivamente. Donde para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  los operadores  $B(\lambda), \tilde{B}(\lambda) \in \mathcal{B}(L_2(\mathbb{T}_+))$  son las proyecciones ortogonales sobre los espacios unidimensionales generados por las funciones*

$$\begin{aligned} g_{\lambda}(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2\lambda}{1-e^{-2\pi\lambda}}} t^{i\lambda-1}, & \lambda \neq 0, \\ \frac{t^{-1}}{\sqrt{\pi}}, & \lambda = 0, \end{cases} \\ \tilde{g}_{\lambda}(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2\lambda}{e^{2\pi\lambda}-1}} t^{-i\lambda+1}, & \lambda \neq 0, \\ \frac{t}{\sqrt{\pi}}, & \lambda = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

respectivamente, con  $t \in \mathbb{T}$ . Más aún,  $\langle g_{\lambda}, \tilde{g}_{\lambda} \rangle = 0$  y  $B(\lambda)\tilde{B}(\lambda) = 0$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

## 2.2 El álgebra de Toeplitz

Denotaremos por  $\mathcal{K}$  al espacio formado por todos los operadores compactos en el espacio de Bergman armónico  $b^2(\mathbb{D})$ . Sea  $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$  el álgebra  $C^*$  generada por los operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman

armónico con símbolo en  $C(\overline{\mathbb{D}})$ . El álgebra de Toeplitz  $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$  es irreducible y contiene al ideal  $\mathcal{K}$  (vea por ejemplo [7]). Además cada elemento en  $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$  es de la forma  $T_v + K$ , donde  $K$  es un operador compacto y  $v \in b^2(\mathbb{D})$ .

En [7] Kunyu Guo y Dechao Zheng probaron el siguiente resultado.

**Teorema 2.7.** *La sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}})) \xrightarrow{j} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0$$

*es una sucesión exacta corta; esto es, el álgebra cociente  $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))/\mathcal{K}$  es isométricamente  $*$ -isomorfa a  $C(\mathbb{T})$ , donde  $i$  es la inclusión y  $j$  es la función que transforma  $T_a + \mathcal{K}$  en la restricción  $a|_{\mathbb{T}}$ .*

El teorema anterior muestra similitudes entre  $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$  en el espacio de Bergman armónico y en el espacio de Bergman, pues el mismo resultado se cumple cuando los operadores actúan en el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ . Sin embargo el índice de Fredholm de un operador de Toeplitz actuando en  $b^2(\mathbb{D})$  es siempre cero contrastando con el correspondiente índice de Fredholm de un operador actuando en el espacio de Bergman  $\mathcal{A}^2(\mathbb{D})$ , cuyo índice depende del número de vueltas que la función símbolo le da al origen.

### 3 El álgebra generada por los operadores de Toeplitz con símbolo continuo a trozos

Sea  $\mathcal{T}_{PC} = \mathcal{T}(PC(\overline{\mathbb{D}}, \ell))$  el álgebra  $C^*$  generada por los operadores de Toeplitz en el espacio de Bergman armónico con símbolos en  $PC(\overline{\mathbb{D}}, \ell)$ . Al contener al álgebra  $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))$ , el álgebra  $\mathcal{T}_{PC}$  es irreducible y contiene al ideal  $\mathcal{K}$ . Denotaremos por  $\pi$  a la proyección natural

$$\pi : \mathcal{T}(PC(\overline{\mathbb{D}}, \ell)) \rightarrow \widehat{\mathcal{T}}_{PC} := \mathcal{T}(PC(\overline{\mathbb{D}}, \ell))/\mathcal{K}.$$

Describiremos el álgebra de Calkin de  $\mathcal{T}(PC(\overline{\mathbb{D}}, \ell))$  utilizando el Principio Local de Douglas-Varela (para detalles vea [13]).

En la representación (1) para la proyección  $Q$ ,  $T$  es un operador compacto de modo que, salvo una perturbación compacta, la proyección  $Q$  es la suma de las proyecciones  $B_{\mathbb{D}}$  y  $\tilde{B}_{\mathbb{D}}$ .



Para  $a \in L_\infty(\mathbb{D})$ , denotamos por  $M_a : L_2(\mathbb{D}) \rightarrow L_2(\mathbb{D})$  al operador de multiplicación

$$M_a(f) = af.$$

El siguiente resultado nos permite usar al álgebra  $\pi(\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))) = \widehat{\mathcal{T}}(C(\overline{\mathbb{D}}))$  como subálgebra central conmutativa del álgebra  $\widehat{\mathcal{T}}(PC(\overline{\mathbb{D}}, \ell))$ .

**Proposición 3.1.** *Sea  $a \in C(\overline{\mathbb{D}})$  y  $b \in L_\infty(\mathbb{D})$ , entonces el conmutador  $[T_a, T_b] = T_a T_b - T_b T_a$  es compacto.*

*Demostración.* Los operadores  $B_{\mathbb{D}}$  y  $\widetilde{B}_{\mathbb{D}}$  son operadores de tipo local (ver [4]), por lo que  $Q = B_{\mathbb{D}} + \widetilde{B}_{\mathbb{D}} + T$  es también de tipo local. Esto es,  $Q$  conmuta con los operadores de multiplicación por funciones continuas en  $\overline{\mathbb{D}}$  módulo un operador compacto. Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned} T_a T_b - T_b T_a &= Q M_a Q M_b - Q M_b Q M_a \\ &= Q M_a M_b - Q M_b Q M_a + K \\ &= Q M_b M_a - Q M_b Q M_a + K \\ &= Q M_b [I - Q] M_a + K \\ &= Q M_b H_a + K, \end{aligned}$$

donde  $K \in \mathcal{K}$ . El operador de Hankel  $H_a : b^2(\mathbb{D}) \rightarrow L_2(\mathbb{D})$  es compacto pues su símbolo es continuo en  $\overline{\mathbb{D}}$  (ver [5]), entonces  $[T_a, T_b]$  es compacto.  $\square$

Denotaremos por  $\widehat{A}$  a la imagen en  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$  de un operador  $A$  en el álgebra  $\mathcal{T}(PC(\overline{\mathbb{D}}, \ell))$ . Por el Teorema 2.7  $\mathcal{T}(C(\overline{\mathbb{D}}))/\mathcal{K}$  es isomorfo a  $C(\mathbb{T})$ , por lo que su espacio de ideales maximales es isomorfo a  $\mathbb{T}$ .

Sea  $J(t)$  el ideal maximal en  $C(\mathbb{T})$  correspondiente al punto  $t \in \mathbb{T}$ , es decir,

$$J(t) = \{aI + \mathcal{K} : a \in C(\mathbb{T}), a(t) = 0\}.$$

Denotaremos por  $\widehat{J}(t) = J(t) \cdot \widehat{\mathcal{T}}_{PC}$  al ideal bilateral cerrado de  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$  generado por  $J(t)$ . De forma análoga al caso de símbolos continuos,  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}(t) = \widehat{\mathcal{T}}_{PC}/\widehat{J}(t)$  representa al álgebra de Calkin de  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$  y  $\pi_t : \widehat{\mathcal{T}}_{PC} \rightarrow \widehat{\mathcal{T}}_{PC}(t)$  la proyección natural.

Al  lgebra  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}(t)$  la llamamos el álgebra local de  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$  en el punto  $t$ . Dos operadores  $A_1$  y  $A_2$  en  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}(\overline{\mathbb{D}}, \ell)$  se llamarán localmente equivalentes en  $t$  si

$$\pi_t(\widehat{A}_1) = \pi_t(\widehat{A}_2),$$

donde  $\hat{A}_1$  (respectivamente  $\hat{A}_2$ ) es la imagen de  $A_1$  ( $A_2$ ) bajo  $\pi$ .

La descripción de las álgebras locales  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}(t)$  se descompone en dos casos: los puntos  $t \in \mathbb{T} \setminus \{-1\}$  y  $t = -1$ .

### 3.1 Álgebras Locales del álgebra $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$

El resultado que mostramos a continuación nos proporciona la descripción de las álgebras locales en los puntos del conjunto  $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$ .

**Teorema 3.2.** *El álgebra local de  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$  en el punto  $t_0 \in \mathbb{T} \setminus \{-1\}$  es isomorfa a  $\mathbb{C}$ .*

*Demostración.* El operador de multiplicación por una función  $a(t)I$  es localmente equivalente a  $a(t_0)I$  en el punto  $t_0$ . Dado que  $B_{\mathbb{D}} + \widetilde{B}_{\mathbb{D}} + \mathcal{K}$  es la identidad en  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$ , el operador de Toeplitz con símbolo  $a$  es localmente equivalente en  $t_0$  a  $a(t_0)I$ . El isomorfismo entre  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}(t_0)$  y  $\mathbb{C}$  está dado por

$$\left( B_{\mathbb{D}} + \widetilde{B}_{\mathbb{D}} \right) a(t)I \mapsto a(t_0).$$

□

Supondremos que la curva  $\ell$  es tal que bajo transformaciones de Möbius, se transforma en un rayo que sale del origen en el semiplano superior. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\ell$  divide al disco  $\mathbb{D}$  en dos regiones que denotaremos por  $\mathbb{D}_1$  y  $\mathbb{D}_2$ .

Utilizando la Proposición 2.5 y el hecho de que la función  $h(z)$ , definida en la fórmula (4), es tal que  $h(0) = 1$  obtenemos el siguiente lema.

**Lema 3.3.** *Sea  $t_0 = -1$ . Entonces el álgebra local  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}(t_0)$  es isomorfa al álgebra generada por los operadores  $\left( B_{\Pi} + \widetilde{B}_{\Pi} \right) W_{\phi} \chi_{\mathbb{D}_j} W_{\phi}^*$ ,  $j = 1, 2$ , donde  $W_{\phi}$  está dado por la ecuación (3).*

Para una función  $a(z) \in PC(\overline{\mathbb{D}})$  sea

$$(5) \quad a^+(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathbb{D}_1}} a(z) \quad \text{y} \quad a^-(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \mathbb{D}_2}} a(z).$$

Consideremos los operadores y las transformaciones definidas en (3) y (4) y sean  $L = \phi(\ell)$ ,  $\Pi_1 = \phi(\mathbb{D}_1)$ ,  $\Pi_2 = \phi(\mathbb{D}_2)$ . Así,

$$\Pi_1 = \{z \in \Pi : 0 < \arg z < \theta\},$$

$$\Pi_2 = \{z \in \Pi : \theta < \arg z < \pi\},$$

donde  $\theta$  es el ángulo que forma la recta  $L$  con el eje  $X$  del semiplano superior  $\Pi$ .

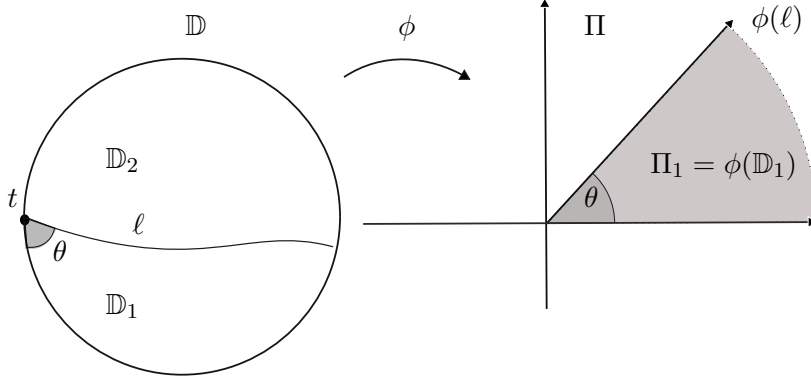


Figura 2: La transformación de Möbius  $\phi$  envía al disco  $\mathbb{D}$  en el semiplano superior  $\Pi$ .

**Lema 3.4.** *El álgebra local en un punto  $t = -1$  es isomorfa al álgebra generada por*

$$(6) \quad (B_{\Pi} + \tilde{B}_{\Pi})\chi_{\Pi_j}I, \quad j = 1, 2,$$

donde  $\chi_{\Pi_j}$  denota la función característica del conjunto  $\Pi_j$ ,  $j = 1, 2$ .

*Demostración.* Se sigue del hecho que localmente en cero  $V$ , definido en (4), es equivalente al operador identidad y del Lema 3.3.  $\square$

Comenzaremos pues a describir el álgebra  $C^*$  generada por los operadores

$$(B_{\Pi} + \tilde{B}_{\Pi})\chi_{\Pi_j}I, \quad j = 1, 2.$$

De acuerdo al Teorema 2.6, esta última álgebra es isomorfa al álgebra  $C^*$  generada por las funciones

$$\left( (I \otimes_{\lambda} B(\lambda) + I \otimes_{\lambda} \tilde{B}(\lambda))\chi_i I \right)_{\lambda \in \mathbb{R}},$$

actuando en  $L_2(\mathbb{R}_+) \otimes L_2(\mathbb{T}_+)$  y donde  $\chi_i$  es la función característica del arco  $\mathbb{T}_+ \cap \Pi_i$ ,  $i = 1, 2$ . Observemos que  $\chi_1$  es la función característica del arco determinado por el ángulo  $\theta$ , es decir,

$$(7) \quad \chi_1 I = \chi_{\theta} I, \quad \chi_2 I = I - \chi_{\theta} I,$$

donde

$$(8) \quad \chi_\theta(t)I = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \theta), \\ 0 & \text{si } t \in [\theta, \pi]. \end{cases}$$

Más aún, dado que  $B(\lambda)$  y  $\tilde{B}(\lambda)$  son proyecciones ortogonales entre sí  $\widehat{Q}(\lambda) := B(\lambda) + \tilde{B}(\lambda)$  es una proyección. El Teorema 2.6 nos indica que  $\widehat{Q}(\lambda)$  es la proyección bidimensional de  $L_2(\mathbb{T}_+)$  sobre el subespacio  $H$  de  $L_2(\mathbb{T}_+)$  generado por  $g_\lambda$  y  $\tilde{g}_\lambda$ . Esta proyección está dada por

$$(9) \quad \widehat{Q}(\lambda)f = \langle f, g_\lambda \rangle g_\lambda + \langle f, \tilde{g}_\lambda \rangle \tilde{g}_\lambda,$$

para  $f \in L_2(\mathbb{T}_+)$  y  $L_2(\mathbb{T}_+) = H \oplus H^\perp$ .

Denotemos por  $\mathfrak{U}_\lambda$  al álgebra  $C^*$  generada por  $\widehat{Q}(\lambda)$  y las proyecciones  $\chi_\theta I$  e  $I - \chi_\theta I$ . Para analizar  $\mathfrak{U}_\lambda$  denotaremos por  $M_1$  y  $M_2$  a las imágenes de las proyecciones  $\chi_\theta I$  e  $I - \chi_\theta I$  respectivamente. Observemos que  $M_j \cap H = \{0\}$  y  $M_j \not\subset H^\perp$ . Consideremos el subespacio cerrado de  $L_2(\mathbb{T}_+)$

$$(10) \quad H_0 = (H^\perp \cap M_1) \oplus (H^\perp \cap M_2)$$

y  $\mathfrak{M} = H_0^\perp$ . Descompongamos  $L_2(\mathbb{T}_+)$  en la suma directa

$$(11) \quad L_2(\mathbb{T}_+) = H_0 \oplus \mathfrak{M}.$$

Tenemos que  $H \subset \mathfrak{M}$ . Consideremos las restricciones de las proyecciones  $\widehat{Q}(\lambda)$ ,  $\chi_\theta I$  e  $I - \chi_\theta I$  al espacio  $\mathfrak{M}$  definidas por

$$Q' = \widehat{Q}(\lambda)|_{\mathfrak{M}}, \quad P_1 = \chi_\theta I|_{\mathfrak{M}}, \quad P_2 = (I - \chi_\theta I)|_{\mathfrak{M}}.$$

Dado que  $\chi_\theta I$  e  $I - \chi_\theta I$  suman la identidad en  $L_2(\mathbb{T}_+)$ , tenemos que  $P_1 + P_2 = I'$ , donde  $I'$  es la identidad en  $\mathfrak{M}$ . Por otra parte, como  $M_j \not\subset H^\perp$  se sigue que todas las restricciones  $P_j$  son no triviales. Además

$$\text{Im } P_1 = \chi_\theta I(\mathfrak{M}) = M_1 \cap \mathfrak{M}.$$

De forma análoga  $\text{Im } P_2 = M_2 \cap \mathfrak{M}$ . Ahora, si  $y \in M_j \cap \mathfrak{M}$  entonces  $y \in P_j(\mathfrak{M})$  por lo que  $M_j \cap \mathfrak{M} \subset P_j(\mathfrak{M})$ . Haciendo  $M'_j = M_j \cap \mathfrak{M}$  tenemos que

$$(12) \quad \mathfrak{M} = M'_1 \oplus M'_2.$$

El conjunto  $\{\chi_\theta I g_\lambda, \chi_\theta I \tilde{g}_\lambda, (I - \chi_\theta I)g_\lambda, (I - \chi_\theta I)\tilde{g}_\lambda\}$  es una base ordenada de  $\mathfrak{M}$ . Mediante el proceso de ortonormalizaci3n de Gram-Schmidt obtenemos la base ortonormal

$$\left\{ e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}, e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|}, e'_1 = \frac{f'_1}{\|f'_1\|}, e'_2 = \frac{f'_2}{\|f'_2\|} \right\},$$

donde

$$\begin{aligned} f_1 &= \chi_\theta I g_\lambda, \\ f_2 &= \chi_\theta I \tilde{g}_\lambda - \frac{\langle \chi_\theta I \tilde{g}_\lambda, \chi_\theta I g_\lambda \rangle}{\|\chi_\theta I g_\lambda\|^2} \chi_\theta I g_\lambda, \\ f'_1 &= (I - \chi_\theta I)g_\lambda, \\ f'_2 &= (I - \chi_\theta I)\tilde{g}_\lambda - \frac{\langle (I - \chi_\theta I)\tilde{g}_\lambda, (I - \chi_\theta I)g_\lambda \rangle}{\|(I - \chi_\theta I)g_\lambda\|^2} (I - \chi_\theta I)g_\lambda. \end{aligned}$$

Tenemos además

$$\begin{aligned} \|f_1\|^2 &= \|\chi_\theta I g_\lambda\|^2, \\ \|f'_1\|^2 &= \|(I - \chi_\theta I)g_\lambda\|^2, \\ \|f_2\|^2 &= \|\chi_\theta I \tilde{g}_\lambda\|^2 - |\langle \tilde{g}_\lambda, e_1 \rangle|^2, \\ \|f'_2\|^2 &= \|(I - \chi_\theta I)\tilde{g}_\lambda\|^2 - |\langle \tilde{g}_\lambda, e'_1 \rangle|^2. \end{aligned}$$

Observemos que  $\{e_1, e_2\}$  es base de  $M'_1$  y  $\{e'_1, e'_2\}$  es base de  $M'_2$ .

**Proposici3n 3.5.** *La matriz de  $Q'$  con respecto a la base ortonormal  $\{e_1, e_2, e'_1, e'_2\}$  de  $\mathfrak{M}$  es*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \bar{\alpha}_1 + \beta_1 \bar{\beta}_1 & \gamma_1 \bar{\beta}_1 & \alpha_2 \bar{\alpha}_1 + \beta_2 \bar{\beta}_1 & \gamma_2 \bar{\beta}_1 \\ \bar{\gamma}_1 \beta_1 & \gamma_1 \bar{\gamma}_1 & \beta_2 \bar{\gamma}_1 & \gamma_2 \bar{\gamma}_1 \\ \alpha_1 \bar{\alpha}_2 + \beta_1 \bar{\beta}_2 & \gamma_1 \bar{\beta}_2 & \alpha_2 \bar{\alpha}_2 + \beta_2 \bar{\beta}_2 & \gamma_2 \bar{\beta}_2 \\ \beta_1 \bar{\gamma}_2 & \gamma_1 \bar{\gamma}_2 & \beta_2 \bar{\gamma}_2 & \gamma_2 \bar{\gamma}_2 \end{pmatrix},$$

donde  $\alpha_1 = \langle e_1, g_\lambda \rangle$ ,  $\beta_1 = \langle e_1, \tilde{g}_\lambda \rangle$ ,  $\gamma_1 = \langle e_2, \tilde{g}_\lambda \rangle$ ,  $\alpha_2 = \langle e'_1, g_\lambda \rangle$ ,  $\beta_2 = \langle e'_1, \tilde{g}_\lambda \rangle$  y  $\gamma_2 = \langle e'_2, \tilde{g}_\lambda \rangle$ .

*Demostraci3n.* De la ecuaci3n (9) obtenemos las expresiones:

$$\begin{aligned} Q'(e_1) &= \langle e_1, g_\lambda \rangle g_\lambda + \langle e_1, \tilde{g}_\lambda \rangle \tilde{g}_\lambda, \\ Q'(e_2) &= \langle e_2, \tilde{g}_\lambda \rangle \tilde{g}_\lambda, \\ Q'(e'_1) &= \langle e'_1, g_\lambda \rangle g_\lambda + \langle e'_1, \tilde{g}_\lambda \rangle \tilde{g}_\lambda, \\ Q'(e'_2) &= \langle e'_2, \tilde{g}_\lambda \rangle \tilde{g}_\lambda. \end{aligned}$$

Dado que  $\{e_1, e_2\}$  es una base ortonormal de  $M_1$ , para cada  $y \in M_1 = \text{Im } \chi_\theta I$  se tiene la representación:

$$y = \langle y, e_1 \rangle e_1 + \langle y, e_2 \rangle e_2.$$

De igual forma cada  $y \in M_2$  tiene una representación en términos de  $e'_1$  y  $e'_2$ . De esto obtenemos:

$$\begin{aligned} \chi_\theta I(g_\lambda) &= \langle g_\lambda, e_1 \rangle e_1 + \langle g_\lambda, e_2 \rangle e_2, \\ (I - \chi_\theta I)(g_\lambda) &= \langle g_\lambda, e'_1 \rangle e'_1 + \langle g_\lambda, e'_2 \rangle e'_2, \\ \chi_\theta I(\tilde{g}_\lambda) &= \langle \tilde{g}_\lambda, e_1 \rangle e_1 + \langle \tilde{g}_\lambda, e_2 \rangle e_2, \\ (I - \chi_\theta I)(\tilde{g}_\lambda) &= \langle \tilde{g}_\lambda, e'_1 \rangle e'_1 + \langle \tilde{g}_\lambda, e'_2 \rangle e'_2. \end{aligned}$$

Así tenemos,

$$\begin{aligned} \chi_\theta I(Q'(e_1)) &= (|\langle g_\lambda, e_1 \rangle|^2 + |\langle \tilde{g}_\lambda, e_1 \rangle|^2) e_1 \\ &\quad + (\langle e_1, g_\lambda \rangle \langle g_\lambda, e_2 \rangle + \langle e_1, \tilde{g}_\lambda \rangle \langle \tilde{g}_\lambda, e_2 \rangle) e_2, \\ (I - \chi_\theta I)(Q'(e_2)) &= \langle e_2, \tilde{g}_\lambda \rangle \langle \tilde{g}_\lambda, e_1 \rangle e_1 + |\langle \tilde{g}_\lambda, e_2 \rangle|^2 e_2, \\ \chi_\theta I(Q'(e'_1)) &= (\langle e'_1, g_\lambda \rangle \langle g_\lambda, e_1 \rangle + \langle e'_1, \tilde{g}_\lambda \rangle \langle \tilde{g}_\lambda, e_1 \rangle) e_1 \\ &\quad + (\langle e'_1, g_\lambda \rangle \langle g_\lambda, e_2 \rangle + \langle e'_1, \tilde{g}_\lambda \rangle \langle \tilde{g}_\lambda, e_2 \rangle) e_2, \\ (I - \chi_\theta I)(Q'(e'_2)) &= \langle e'_2, \tilde{g}_\lambda \rangle \langle \tilde{g}_\lambda, e_1 \rangle e_1 + \langle e'_2, \tilde{g}_\lambda \rangle \langle \tilde{g}_\lambda, e_2 \rangle e_2. \end{aligned}$$

□

Representando a  $L_2(\mathbb{T}_+)$  como la suma directa

$$L_2(\mathbb{T}_+) = (H^\perp \cap M_1) \oplus (H^\perp \cap M_2) \oplus (M'_1 \oplus M'_2),$$

tenemos que el álgebra  $\mathfrak{U}_\lambda$  es isomorfa a una subálgebra de  $M_4(\mathbb{C})$ . El isomorfismo está dado por la transformación de los generadores:

$$\begin{aligned} \chi_\theta I &\mapsto \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \widehat{Q}(\lambda) &\mapsto \begin{pmatrix} C & \sqrt{C(I-C)} \\ \sqrt{C(I-C)} & I-C \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde la matriz  $C = C_\theta(\lambda)$  está dada por

$$C_\theta(\lambda) = \text{csch}(\lambda\pi) \begin{pmatrix} e^{\lambda(\pi-\theta)} \sinh(\lambda\theta) & \lambda e^{-i\theta} \text{sen } \theta \\ \lambda e^{i\theta} \text{sen } \theta & e^{\lambda(\theta-\pi)} \sinh(\lambda\theta) \end{pmatrix}.$$

El operador  $C$  es positivo y  $C \leq I$ . Usando el Teorema Espectral obtenemos la representación para las proyecciones:

$$\begin{aligned} \chi_\theta I &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \widehat{Q}(\lambda) &\mapsto \begin{pmatrix} 1-x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & x \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con  $x \in \overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{Sp}(C_\theta(\lambda))} = \text{Sp}(Q - \chi_{\mathbb{D}_1})^2$ . Ahora el problema se reduce a hallar este espectro mediante la relación:

$$\overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{Sp}(C_\theta(\lambda))} = \overline{\{\text{Sp}(C_\theta(\lambda)) : \lambda \in \mathbb{R}\}}.$$

Los valores propios de la matriz  $C_\theta(\lambda)$  están dados por:

$$\begin{aligned} x_1(\lambda) &= \text{csch}(\lambda\pi) \left[ \sinh(\lambda\theta) \cosh \lambda(\pi - \theta) + \sqrt{\sinh^2(\lambda\theta) \sinh^2 \lambda(\pi - \theta) + \lambda^2 \text{sen}^2 \theta} \right], \\ x_2(\lambda) &= \text{csch}(\lambda\pi) \left[ \sinh(\lambda\theta) \cosh \lambda(\pi - \theta) - \sqrt{\sinh^2(\lambda\theta) \sinh^2 \lambda(\pi - \theta) + \lambda^2 \text{sen}^2 \theta} \right], \end{aligned}$$

implicando que

$$\{\text{Sp}(C_\theta(\lambda)) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Im}(x_1) \cup \text{Im}(x_2).$$

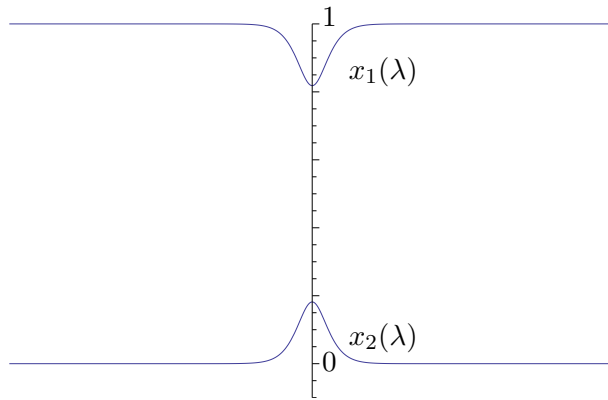
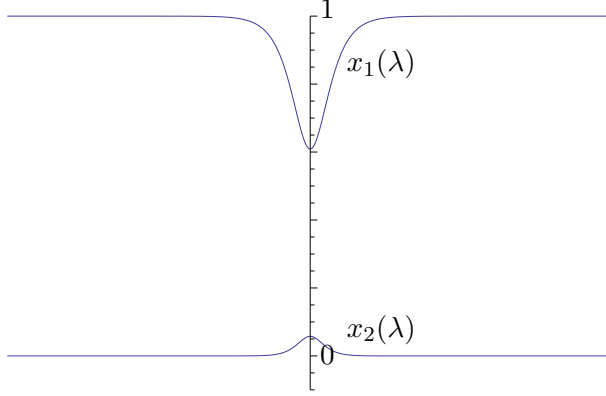


Figura 3: Gráfica del espectro para  $\theta = \pi/2$

Figura 4: Gráfica del espectro para  $\theta = \pi/3$ 

Observemos que  $x_1(\lambda) = x_1(-\lambda)$ , es decir, es una función par. Más aún,

$$x_1(0) = \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\pi},$$

por lo que  $\lambda = 0$  es un mínimo local para la función  $x_1(\lambda)$  y un máximo local para la función  $x_2(\lambda)$ . En vista de la simetría de las funciones y las condiciones descritas anteriormente reduciremos nuestro análisis a la función  $x_1(\lambda)$  en el intervalo  $(0, \infty)$ . La derivada  $x_1'(\lambda)$  de la función  $x_1$  es positiva para  $\lambda \in (0, \infty)$  y negativa en  $(-\infty, 0)$  por lo que 0 es un mínimo absoluto para la función  $x_1(\lambda)$ . Además  $\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} x_1(\lambda) = 1$ , por lo que  $\text{Im}(x_1) = (\frac{\theta + \text{sen } \theta}{\pi}, 1)$ . De forma análoga se tiene  $\text{Im}(x_2) = (0, \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\pi})$ .

Concluimos que  $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{Sp}(C_\theta(\lambda)) = (0, \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\pi}) \cup (\frac{\theta + \text{sen } \theta}{\pi}, 1)$ . En consecuencia

$$\overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \text{Sp}(C_\theta(\lambda))} = \left[0, \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\pi}\right] \cup \left[\frac{\theta + \text{sen } \theta}{\pi}, 1\right].$$

Así tenemos el resultado:

**Lema 3.6.** *El álgebra  $C^*$  generada por  $\widehat{Q}(\lambda)$  y  $\chi_\theta I$  es isomorfa a una subálgebra de  $C_b(\mathbb{R}, M_2(\mathbb{C}))$ . El isomorfismo está dado por la transfor-*



mación de los generadores:

$$\begin{aligned}\widehat{Q}(\lambda) &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \chi_\theta I &\mapsto \begin{pmatrix} 1-x & \sqrt{x(1-x)} \\ \sqrt{x(1-x)} & x \end{pmatrix},\end{aligned}$$

con  $x \in [0, \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\pi}] \cup [\frac{\theta + \text{sen } \theta}{\pi}, 1]$ .

**Teorema 3.7.** *El álgebra local de  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$  en el punto  $t_0 = -1$  es isomorfa al álgebra*

$$C(\text{Sp}(Q - \chi_{\mathbb{D}_1})^2).$$

El isomorfismo está dado por la transformación de los generadores:

$$Qa(z)IQ \mapsto a^+(t_0)(1-x) + a^-(t_0)x,$$

con  $x \in \Delta := [0, \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\pi}] \cup [\frac{\theta + \text{sen } \theta}{\pi}, 1]$ .

### 3.2 Descripción del álgebra $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$

Denotemos por  $\widehat{\mathbb{T}}$  la compactificación de  $\mathbb{T} \setminus \{-1\}$ . Bajo esto, al punto  $t = -1$  le corresponde un par de puntos en  $\widehat{\mathbb{T}}$ ,  $t_1^+$  y  $t_1^-$ , ordenados en dirección positiva. El conjunto  $\widehat{\mathbb{T}}$  coincide con el conjunto de ideales maximales del álgebra  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$ .

Para pegar las diferentes álgebras locales consideraremos los diferentes puntos en la frontera de  $\mathbb{D}$ . El Teorema 3.7 muestra que  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}(t)$  es isomorfa al álgebra  $C([0, \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\pi}] \cup [\frac{\theta + \text{sen } \theta}{\pi}, 1])$ , para  $t = -1$ .

Para un operador compacto  $K$ , consideramos el generador del álgebra  $\mathcal{T}_{PC}$ :  $A = (B_{\mathbb{D}} + \widetilde{B}_{\mathbb{D}})a(z)I + K$ . Usando el Teorema 3.7 podemos definir

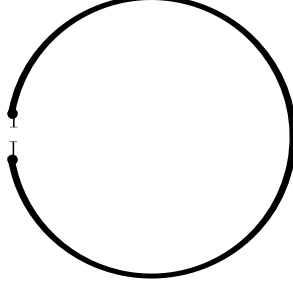
$$A(x) = a^+(t)(1-x) + a^-(t)x$$

donde  $x \in [0, \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\pi}] \cup [\frac{\theta + \text{sen } \theta}{\pi}, 1]$ . Entonces tenemos

$$A(0) = a^+(t), \quad A(1) = a^-(t).$$

Sea  $\vartheta$  la función que identifica los puntos de  $\Delta$  con los puntos de  $\widehat{\mathbb{T}}$ , dada por la fórmula

$$\begin{aligned}\vartheta(0) &= t_1^+, \\ \vartheta(1) &= t_1^-.\end{aligned}$$

Figura 5: Curva  $\Gamma = \Delta \cup_{\vartheta} \widehat{\mathbb{T}}$ 

Sean  $\sigma_1 \in C(\widehat{\mathbb{T}})$  y  $\sigma_2 \in C(\Delta)$ . Denotemos por  $\mathfrak{S}$  al álgebra de todos los pares  $(\sigma_1, \sigma_2)$  que satisfacen las condiciones:

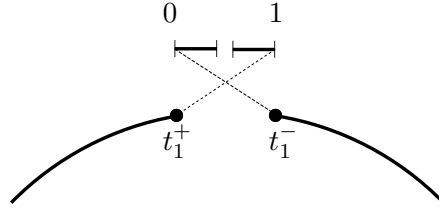
$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow t_1^-} \sigma_2(x) = \sigma_1(\vartheta(0))$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow t_1^+} \sigma_2(x) = \sigma_0(\vartheta(1))$$

La norma en el álgebra  $\mathfrak{S}$  está determinada como sigue

$$\|\sigma\| = \max \left\{ \sup_{\widehat{\mathbb{T}}} |\sigma_1(t)|, \sup_{\Delta} \|\sigma_2(x)\| \right\}.$$

Notemos que para cada par de puntos  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  define una función continua en  $\Gamma = \Delta \cup_{\vartheta} \widehat{\mathbb{T}}$ .

Figura 6: Pegado en el punto  $t = -1$ .

La descripción de las álgebras locales  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}(t)$  junto con el principio local de Douglas-Varela dan lugar al resultado principal de este trabajo.

**Teorema 3.8.** *El álgebra de Calkin  $\widehat{\mathcal{T}}_{PC}$  del álgebra  $C^*$   $\mathcal{T}(PC(\overline{\mathbb{D}}, \ell))$  es isomorfa e isométrica a  $C(\Gamma)$ . El isomorfismo  $\text{sym} : \mathcal{T}_{PC} \rightarrow C(\Gamma)$  está dado por la transformación de los generadores del álgebra  $\mathcal{T}_{PC}$ :*

$$\text{sym} : A = (B_{\mathbb{D}} + \widetilde{B}_{\mathbb{D}})a(z)I + K \mapsto \begin{cases} a(t), & t \in \widehat{\mathbb{T}}, \\ a^+(t)x + a^-(t)(1-x), & x \in \Delta, t = -1, \end{cases}$$

donde  $a^{\pm}(t)$  son los límites definidos por la fórmula (5).

Finalmente, consideremos el conjunto de operadores de Fredholm de  $\mathcal{T}_{PC}$  y que denotaremos por  $\text{Fred}(\mathcal{T}_{PC})$ .

**Corolario 3.9.** *El índice de cada operador en  $\text{Fred}(\mathcal{T}_{PC})$  es cero.*

Mostraremos esto mediante el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fred}(\mathcal{T}_{PC}) & \xrightarrow{\pi} & G(\widehat{\mathcal{T}}_{PC}) & \xrightarrow{\text{ind}} & G(\widehat{\mathcal{T}}_{PC})/G_0(\widehat{\mathcal{T}}_{PC}) \\ & \searrow \text{Ind} & & & \swarrow \Psi \\ & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

Por un lado,  $G(\mathcal{T}_{PC}) = G(C(\Gamma))$  y éste consiste de las funciones continuas en  $\Gamma$  que no se anulan en  $\Gamma$ . Calcularemos ahora la componente conexa de la identidad en  $G(C(\Gamma))$ , es decir,  $G_0(C(\Gamma))$ . Para esto observemos que cada función  $a \in C(\Gamma)$  es homotópica a la identidad. Entonces  $G_0(\Gamma) = G(C(\Gamma))$  y en consecuencia

$$G(\widehat{\mathcal{T}}_{PC})/G_0(\widehat{\mathcal{T}}_{PC}) = \{0\}.$$

Por lo tanto el índice de Fredholm de cada operador es cero.

Maribel Loaiza  
Departamento de Matemáticas,  
CINVESTAV-IPN,  
Apartado Postal 14-740,  
07000, Mexico, D.F.  
maribel.loaiza@gmail.com

Carmen Lozano  
Departamento de Matemáticas,  
CINVESTAV-IPN,  
Apartado Postal 14-740,  
07000, Mexico, D.F.  
carmenlozano@math.cinvestav.edu.mx

## Referencias

- [1] Axler S.; Bourdon P.; Ramey W., Harmonic Function Theory, Graduate Text in Mathematics 137, Springer, New York, 1992.

- [2] Choe B. R.; Lee Y. J.; Na K., *Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces*, Nagoya Math. J. **174** (2004), 165–186.
- [3] Choe B. R.; Lee Y. J., *Commuting Toeplitz operators on the harmonic Bergman spaces*, Michigan Math. J. **46** (1999), 163–174.
- [4] Dzhuraev A., *Methods of Singular Integral Equations*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 60, Longman Scientific and Technical, 1992.
- [5] Jovović M., *Compact Hankel operators on harmonic Bergman spaces*, Integral Equations Operator Theory **22** (1995), 295–304.
- [6] Karlovich Y. I.; Pessoa L., *Algebras generated by the Bergman and anti-Bergman projections and by multiplications by piecewise continuous functions*, Integral Equations Operator Theory, **52:2** (2005), 219–270.
- [7] Guo K.; Zheng D., *Toeplitz algebra and Hankel algebra on the harmonic Bergman space*, J. Math. Anal. Appl. **276** (2002), 213–230.
- [8] Loaiza M., *Algebras generated by the Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions*, Integral Equations Operator Theory **46** (2003), 215–234.
- [9] Loaiza M., *On the algebra generated by the harmonic Bergman projection and operators of multiplication by piecewise continuous functions*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **10:2** (2004), 179–193.
- [10] Miao J., *Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces*, Integral Equations Operator Theory **27:4** (1997), 426–438.
- [11] Ramírez de Arellano E.; Vasilevski N., *Bargmann projection, three-valued functions and corresponding Toeplitz operators*, Contemp. Math. **212** (1998), 185–196.
- [12] Simonenko I. B., *A new general method to study linear operator equations of the singular integral equation type, II*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math., **29** (1965), 757–782.
- [13] Vasilevski N. L., *On Toeplitz operators with piecewise continuous symbols on the Bergman space*, Operator Theory: Advances and Applications **170** (2007), 229–248.

- [14] Vasilevski N. L., *C\*-bundle approach to a local principle*, Reporte Interno 363, Departamento de Matemáticas, CINVESTAV del I.P.N., Mexico, 2005.
- [15] Vasilevski N. L., *Commutative Algebras of Toeplitz Operators on the Bergman Space*, Birkhäuser Basel, 2008.
- [16] Zhu K., *Operator Theory in Function Spaces*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1990.