Morfismos, Vol. 3, No. 2, 1999, pp. 1–29

PREDICCIÓN DE BIFURCACIONES DE ÓRBITAS PERIÓDICAS POR MEDIO DEL MÉTODO DE BALANCE ARMÓNICO.

Baltazar Aguirre Hernández [1]

Resumen

En este trabajo se estudia un sistema lineal en $\mathbb{R}^3$ retroalimentado por un control lineal con saturación. El objetivo es obtener información acerca de las soluciones periódicas del sistema. El método que se aplica en el artículo es una técnica usada para detectar posibles soluciones periódicas conocida como Método de Balance Armónico y en este caso la información proporcionada ha permitido conjeturar una bifurcación de órbitas periódicas que en el texto es referida como rompimiento de una órbita simétrica.

1991 Mathematics Subject Clasification: 93C10
Keywords and phrases: Método de balance armónico, retroalimentación de estado, saturación, región de atracción, órbita periódica de primer armónico, alta ganancia, bifurcaciones de órbitas periódicas.

1 Introducción

Consideremos sistemas del siguiente tipo

$$\dot{x} = Ax + bu \tag{1}$$

donde A es una matriz cuadrada de $n \times n$, $x(t)$ y b son vectores en $\mathbb{R}^n$, y u es una función real llamada control que introducimos con el fin de lograr un cierto objetivo. Por ejemplo, se puede buscar que el sistema

[1]Este trabajo es parte de la tesis doctoral que el autor realizó bajo la dirección del Dr. Rodolfo Suárez Cortés en la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa. La realización de dicha tesis se llevó a cabo con el apoyo del CONACYT.

controlado sea globalmente asintóticamente estable. Si $u = u(x)$, entonces se dice que u es una retroalimentación de estado. En el diseño de leyes de retroalimentación de estado usualmente no se considera la restricción de que las entradas sean acotadas, es decir que u deba ser una función acotada. Sin embargo, en los sistemas físicos (en las aplicaciones) existen especificaciones de seguridad y desempeño, así como otras limitaciones (de espacio o de energía, por ejemplo) y debido a esto, es necesario imponer ciertas restricciones en las leyes de control, de manera que en la práctica las acciones de control alcanzan el valor máximo y mínimo físicamente posibles de las entradas.

Un enfoque natural para diseñar controles acotados es considerar saturaciones de retroalimentaciones lineales. A continuación explicamos este enfoque. Cuando en el sistema (1) el par (A, b) es controlable (ver la Sección 2 para una definición de controlabilidad), entonces existe una retroalimentación de estado $u = K^T x$, donde $K \in \mathbb{R}^n$ es tal que los valores propios de la matriz $A + bK^T$ pueden ser escogidos arbitrariamente. En particular, puede conseguirse que el sistema $\dot{x} = (A+bK^T)x$ sea globalmente asintóticamente estable. Con la finalidad de construir la llamada saturación de u hacemos la siguiente definición.

Definición 1.0.1 *Sea v una función de control del sistema* (1) *y u^-, u^+ números reales tales que $u^- < 0 < u^+$. Si $[u^-, u^+]$ es el conjunto de valores admisibles, entonces la saturación de v, a la cual denotamos como v_{sat}, es la siguiente función*

$$\mathcal{S}(v) = \begin{cases} u^- & \text{si} \quad u^- > v \\ v & \text{si} \quad u^- \leq v \leq u^+ \\ u^+ & \text{si} \quad v > u^+ \end{cases} \tag{2}$$

De esta manera, si u es de la forma $u(x) = K^T x$ la correspondiente función saturada queda definida como

$$u_{sat}(x) = \mathcal{S}(K^T x)$$

y el sistema a lazo cerrado como

$$\dot{x} = Ax + b\mathcal{S}(K^T x) \tag{3}$$

En este trabajo nosotros sólo cosideraremos funciones de saturación simétricas, es decir $u^+ = -u^-$. Más precisamente, tomaremos $u^+ = 1$ y $u^- = -1$, es decir, el sistema que estudiaremos es el siguiente

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax - b & \text{si} \quad -1 > K^T x \\ Ax + (K^T x)b & \text{si} \quad -1 \leq K^T x \leq 1 \\ Ax + b & \text{si} \quad K^T x > 1 \end{cases} \tag{4}$$

Obsérvese que aunque el sistema resultante a lazo cerrado $\dot{x} = Ax + bu_s(x)$ es no lineal, presenta la característica de ser continuo y lineal por pedazos. Esta clase de sistemas es muy interesante ya que ellos combinan diferentes tipos de comportamiento dinámico en diferentes regiones del espacio de estado. El estudio de sistemas con saturacion es un tema de interés actual. Por ejemplo, en [Alvarez & Curiel, 1997] se hace un estudio del comportamiento dinámico de sistemas de segundo orden con entrada saturada. En cuanto a sistemas similares a (1) en realidad el comportamiento dinámico observado es muy diverso: desde estabilidad asintótica global hasta caos [ver Kahlert, C. & Rossler, 1985 y Chua *et al,* 1986]. En nuestro caso, la introducción de la función de saturación $\mathcal{S}(u)$ en el sistema (1) induce comportamientos típicamente no lineales, tales como: multiplicidad de puntos de equlibrio, aparición de órbitas periódicas, flujos restringidos a esferas, cilindros, etc., de aquí el interés de hacer una descripición cualitativa de éstos sistemas, caracterizarizando sus puntos de equilibrio, sus órbitas periódicas, la forma de la región de atracción, etc. En un trabajo previo sobre sistemas bidimensionales [Alvarez *et al.,* 1993], se estudió el comportamiento cualitativo de la región de atracción del origen $\Omega(0)$ en términos de los parámetros del sistema no controlado y también se estableció la clasificación de los puntos de equilibrio de (1). Sea $\sigma(A)$ el espectro de la matriz A. Se mostró que si $\sigma(A) \cap C^+ \neq \emptyset$, el origen no es globalmente asintóticamente estable. Además, si traza$(A) > 0$, entonces podría aparecer una órbita periódica alrededor del origen de manera que $\Omega(0)$ es un conjunto acotado. Además, fueron descritas bifurcaciones topológicas de $\Omega(0)$ tales como el paso de $\Omega(0)$ de un conjunto no acotado a un conjunto acotado a tráves de conexiones homo(hetero)-clínicas entre puntos de equilibrio de tipo silla.

En un trabajo sobre sistemas en $\mathbb{R}^n$ [Suárez *et al*, 1995], se continuó con la misma metodología del trabajo anterior y se dió una caracterización topológica de la región de atracción del origen (**RA**) para sistemas lineales con control lineal saturado. Para este fin, fue esencial el estudio del comportamiento dinámico sobre la frontera de la **RA**. Los resultados en [Suárez *et al*] especificamente para $n = 3$ son los siguientes: El número de valores propios con parte real positiva del sistema a lazo abierto, n_u, determina la forma de la **RA** del origen. Si A es invertible y n_u es impar, entonces (1) tiene tres puntos de equilibrio, un atractor y dos puntos silla del tipo-n_u cuando $n_u = 1$, o uno atractor y dos repulsores cuando $n_u = 3$. Si A es invertible y $n_u = 0, 2$ ó si $\det(A) = 0$, entonces (1) tiene sólamente un punto de equilibrio el cual es un atractor. Para A antiestable ($\sigma(A) \subset \mathrm{C}^+$), se probó que la **RA** es acotada y homeomórfica a la bola unitaria. Para sistemas a lazo abierto estables, se probó que todas las trayectorias eventualmente tienden hacia algún conjunto compacto de volumen cero. Para el caso de sistemas con algunos valores propios con parte real positiva y otros con parte real negativa, resulta que una retroalimentación que sólo reubica los valores propios con parte real positiva, hace la **RA** homeomórfica al producto de las **RA**s asociadas a las partes estable y estabilizada. En consecuencia, la **RA** del sistema a lazo cerrado es homeomórfica al cilindro $\mathbb{R}^{3-n_u} \times B^{n_u}$. Manteniendo fijos los valores propios reubicados, la estructura cilíndrica de la **RA** se mantiene bajo pequeños cambios en la ubicación de los valores propios estables a lazo abierto.

En este trabajo, estudiaremos el problema de la existencia de ciclos límite, el cual no fue considerado en [Suárez *et al*, 1995]. Debido a la dificultad en las operaciones, en este trabajo nos restringimos a sistemas tridimensionales, aunque algunos de estos resultados pueden ser generalizados al caso n-dimensional [ver Aguirre *et al*, 1997]. Ya que el problema de la existencia de órbitas periódicas no es una tarea fácil, porque en general no es posible encontrar explícitamente las soluciones del sistema $\dot{x} = Ax + b\mathcal{S}(K^T x)$ y en sistemas de dimensiones mayores que 2 es muy limitado el trabajo que hay en la investigación de órbitas periódicas con el uso de las técnicas de sistemas dinámicos, buscaremos órbitas periódicas en forma aproximada usando el método de balance armónico (**MBA**) [Mees, 1981; Krenz and Miller, 1986; Moiola and Chen, 1993, 1996]. Aunque el **MBA** es aproximado y no riguroso, es usado con frecuencia para detectar órbitas periódicas de sistemas no lineales [Mees, 1981]. El método se ha empleado en el estudio de bifurcaciones en sistemas no lineales [Tesi *et al*, 1996; Basso *et al*, 1997] y también ha sido aplicado en la predicción de caos [Genesio & Tesi, 1992]. En cuanto al análisis de propiedades cualitativas de sistemas, recientemente Llibre y Ponce [1996] utilizaron el **MBA** para describir la dinámica de sistemas de control en dos y tres dimensiones que están sujetos a retroalimentaciones de estado con saturación estabilizantes. En este trabajo se puede encontrar una descripción completa de bifurcaciones periódicas de primer armónico **(PA)** simétricas (con respecto al origen), encontrándose una gran variedad de comportamientos dinámicos. Aquí aplicaremos esta técnica también para estudiar las órbitas periódicas no simétricas y las bifurcaciones en el número de órbitas periódicas que se encuentran sobre la frontera de la **RA** cuando los parámetros del control cambian, pero se conserva la estabilidad del sistema a lazo cerrado. En particular, cuando la matriz a lazo abierto es antiestable, la información que proporciona el método permite conjeturar una bifurcación que consiste en el rompimiento de una órbita simétrica, es decir, cuando la razón de convergencia al origen es aumentada, una órbita periódica simétrica aproximada se bifurca para producir al menos tres órbitas: una órbita periódica simétrica más dos órbitas periódicas no simétricas.

Además de permitir detectar la existencia de órbitas periódicas, el **MBA** también proporciona información geométrica que nos da cierta idea del tamaño de la region de atracción. Esto y los resultados en [Suárez *et al*,1995] permitirán hacer algunas conjeturas acerca del tamaño de la **RA**.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: La sección 2 está dedicada a la exposición de algunas nociones básicas de controlabilidad y también presentamos la función de transferencia y una propiedad de esta función que utilizaremos posteriormente. En la sección 3 presentamos el **MBA** e indicamos las ideas en que está basado. En la sección 4 aplicamos el **MBA** en el estudio de un sistema en 3 dimensiones. En particular, cuando la matriz A es antiestable, es decir, que todos sus eigenvalores tienen parte real estrictamente positiva, hemos conjeturado una bifurcación que consiste en el rompimiento de una órbita periódica simétrica.

2 Preliminares

2.1 Sistemas controlables

Ya que sólo trabajaremos con sistemas controlables, enseguida hacemos precisa la definición de controlabilidad.

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{5}$$

donde A es una matriz real de $n \times n$, B es una matriz real de $n \times m$ y C es una matriz real de $p \times n$. A u la llamamos función de control y a y la salida del sistema.

Dada $u(t)$ denotamos por $\varphi(t, 0, u)$ la correspondiente solución del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ tal que $\varphi(0, 0, u) = 0$.

Definición 2.1.1 *Decimos que $\overline{x}$ es alcanzable desde el origen si existe un control $\overline{u}$ y un tiempo $\overline{t}$ tal que $\varphi(\overline{t}, 0, \overline{u}) = \overline{x}$.*

Denotemos por $\Re_0$ al conjunto de estados alcanzables desde el origen. Si $\Re_0 = \mathbb{R}^n$, decimos que el par (A, B) es controlable.

Ahora denotemos $\mathcal{B} =$ imagen de B y $\langle A|\mathcal{B}\rangle = \mathcal{B} + A\mathcal{B} + \cdots + A^{n-1}\mathcal{B}$. Entonces se tiene la igualdad $\Re_0 = \langle A|\mathcal{B}\rangle$. De aquí que podemos decir que el par (A, B) es controlable si y solo si $\langle A|\mathcal{B}\rangle = \mathbb{R}^n$ [Wonham, 1985].

Para sistemas $\dot{x} = Ax + bu$ de una sola entrada que son controlables, existen formas canónicas que simplifican las operaciones que haremos en este trabajo. Cuando el par (A, b) es controlable, entonces (A, b) se puede escribir en la siguiente forma canónica [Barnett and Cameron, 1985]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

2.2 Una expresión para la función de transferencia

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b\mathcal{S}(u) \\ u &= k^T x \end{aligned} \tag{7}$$

Donde A es una matriz cuadrada de $n \times n$, x, b son vectores en $\mathbb{R}^n$, $u = u(t)$ es una función real llamada control y $\mathcal{S}(u) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función de saturación

$$\mathcal{S}(u) = \begin{cases} -1 & u \leq -1 \\ u & -1 < u < 1 \\ 1 & 1 \leq u \end{cases} \tag{8}$$

Denotemos por $p = \frac{d}{dt}$. Dado $u(t) = k^T x(t)$, y tomando en cuenta el sistema a lazo cerrado $(A - pI)x(t) = -b\mathcal{S}(u(t))$, se siguen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \det(A - pI)u(t) &= k^T \det(A - pI)x(t) \\ &= k^T \mathrm{adj}(A - pI)(A - pI)x(t) \\ &= -k^T \mathrm{adj}(A - pI)b\mathcal{S}(u(t)) \end{aligned}$$

La ecuación $\det(A - pI)u(t) = -k^T \mathrm{adj}(A - pI)b\mathcal{S}(u(t))$ es una ecuación diferencial que gobierna el comportamiento dinámico de la señal $u(t)$. Esta ecuación acostumbra escribirse como:

$$u(t) = -W(p)\mathcal{S}(u(t)) \tag{9}$$

donde $W(p) = k^T(A - pI)^{-1}b$ es conocida como la función de transferencia de la señal $\mathcal{S}(u)$ a la señal u.

En el siguiente lema damos una expresión de la función de transferencia como un cociente de polinomios.

Lema 2.2.1 *Si s no es un eigenvalor de A y h es un número real, entonces* $1 + hW(s) = \frac{\det(A + hbk^T - sI)}{\det(A - sI)}$.

Para una demostración ver [Barnett & Cameron, 1985].

3 Predicción de órbitas periódicas: El Método de Balance Armónico

Dado un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales, encontrar analítica– mente una solución periódica, es en general un problema complicado. De aquí que en la práctica es útil contar con un método que proporcione un análisis aproximado, es decir un método que detecta la posible existencia o no de soluciones periódicas. *El método de balance armónico* [Mees,1981] o **MBA**, es un método que permite hacer este análisis aproximado. Las primeras investigaciones del **MBA** para el análisis de sistemas de control fueron reportadas en la década de los 40's [Goldfarb, 1947; Kochenburger, 1950; Johnson, 1952]. En [Andronov, 1937; Cap. IX, p. 583] se propone un método para la investigacion de órbitas periódicas de ciertos sistemas y la idea que hay detrás de este método es esencialmente la misma en la que está basado el **MBA**. Una exposición del **MBA** puede encontrarse en varios libros [Aizerman, M. A.,1963; Mees, 1981; Vidyasagar; 1993].

A continuación exponemos las ideas en que se basa este método. Como vimos en la sección anterior, el sistema (7) tiene asociada la ecuación diferencial (9). De aquí se obtiene que si el sistema (7) tiene una solución periódica $x(t)$, el sistema (9) también tendrá una solución periódica $k^T x(t)$. Equivalentemente, si el sistema (9) no tiene soluciones periódicas entonces el sistema (7) tampoco tendrá soluciones periódicas. De aquí que de alguna manera se pueden estudiar las soluciones periódicas del sistema (7) estudiando las soluciones periódicas del sistema (9).

Supongamos que el sistema (9) tiene una solución periódica de la forma

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m \exp(im\omega t), \text{ con } \alpha_m = \overline{\alpha}_{-m}$$

y, por lo tanto, la función no lineal $\mathcal{S}(u)$ admite una serie de Fourier de la forma

$$\mathcal{S}(u(t)) = \sum_{-\infty}^{\infty} \beta_m \exp(im\omega t), \text{ con } \beta_m = \overline{\beta}_{-m}.$$

Sustituyendo estas series en la ecuación (2.5) podemos obtener que

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m \exp(im\omega t) = -\sum_{-\infty}^{\infty} W(im\omega)\beta_m \exp(im\omega t). \tag{10}$$

Igualando coeficientes se llega a un sistema infinito de ecuaciones

$$\alpha_m + W(im\omega)\beta_m = 0, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{11}$$

Resolver este sistema implica encontrar una solución periódica del sistema (9). Ahora tratemos este problema en términos de operadores. Sean

$$\mathcal{N} : L_2\left[0, \tfrac{2\pi}{\omega}\right] \to \left[0, \tfrac{2\pi}{\omega}\right]$$
$$\mathcal{D} : L_2\left[0, \tfrac{2\pi}{\omega}\right] \to \left[0, \tfrac{2\pi}{\omega}\right]$$

tales que $\mathcal{N}(f)(t) = \mathcal{S}(f(t))$ y

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_m \exp(im\omega t) \mapsto -\sum_{-\infty}^{\infty} W(im\omega)\gamma_m \exp(im\omega t).$$

Entonces encontrar una solución periódica del sistema (9) es equivalente a encontrar un punto fijo del operador $\mathcal{D} \circ \mathcal{N}$.

Por otra parte, es conocido que

$$1 + W(s) = \frac{\det(A + bk^T - sI)}{\det(A - sI)}$$

[ver lema 2.2.1]. Esto implica que $W(s)$ es una función racional para la cual el grado del numerador es menor que el grado del denominador. Por lo tanto $W(i\omega) \to 0$ cuando ω es muy grande (se dice que W es un filtro pasa bajos). De aquí que dada una función $g \in L_2$, el operador $\mathcal{D}$ tiene el efecto de atenuar los armónicos mayores de g, de donde surge la idea de pensar que resolver (11) sólo para $m = 0$ y $m = \pm 1$ puede proporcionar en ciertos casos una buena aproximación. Esto es la base de una técnica que en teoría de control es conocida como Método de Balance de Primer Armónico.

Bajo estas ideas el método plantea suponer que la ecuación (9) tiene una solución periódica la cual puede ser aproximada como una solución de primer armónico de la forma:

$$u_0(t) = \alpha_0 + a \sin \omega t, \qquad a, \omega > 0$$

y asumir que la función no lineal $\mathcal{S}(u_0(t))$ admite una serie de Fourier $\mathcal{S}(u_0(t)) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \sin l\omega t$ [Mees, 1981]. Tomando en cuenta solamente los primeros 2 términos (aproximación del primer armónico), se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_0 + W(0)F(a, \alpha_0) = 0 \tag{12}$$

$$1 + W(i\omega)G(a, \alpha_0) = 0, \tag{13}$$

donde

$$F(a, \alpha_0) = \beta_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{S}(\alpha_0 + a \sin \theta) d\theta \tag{14}$$

$$G(a, \alpha_0) = \frac{\beta_1}{a} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \mathcal{S}(\alpha_0 + a \sin \theta) \sin \theta d\theta. \tag{15}$$

Estas funciones pueden determinarse calculando las respectivas integrales, para dar lugar a los siguientes 6 casos:

c₁) $\frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} \leq -1$,

$F(a,\alpha_0) = 1, \quad G(a,\alpha_0) = 0.$

$\mathbf{c_2}$) $\frac{-1-\alpha_0}{a} \leq$

$-1 < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1$,

$F(a,\alpha_0) = \frac{1}{2}(1+\alpha_0) - \frac{(1-\alpha_0)}{\pi}\sin^{-1}\frac{1-\alpha_0}{a} - \frac{a}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2}$,

$G(a,\alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\sin^{-1}\frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{(1-\alpha_0)}{a}\sqrt{1-\left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2}\right).$

$\mathbf{c_3}$)$-1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1$,

$F(a,\alpha_0) = \frac{1+\alpha_0}{\pi}\sin^{-1}\frac{1+\alpha_0}{a} - \frac{1-\alpha_0}{\pi}\sin^{-1}\frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{a}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} - \frac{a}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2}$,

$G(a,\alpha_0) = \frac{1}{\pi}\sin^{-1}\frac{1+\alpha_0}{a} + \frac{1}{\pi}\sin^{-1}\frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{1+\alpha_0}{a\pi}\sqrt{1-\left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} + \frac{1-\alpha_0}{a\pi}\sqrt{1-\left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2}.$

$\mathbf{c_4}$) $\frac{-1-\alpha_0}{a} \leq -1 < 1 \leq \frac{1-\alpha_0}{a}$,

$F(a,\alpha_0) = \alpha_0, \quad G(a,\alpha_0) = 1.$

$\mathbf{c_5}$)$-1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < 1 \leq \frac{1-\alpha_0}{a}$

$F(a,\alpha_0) = -\frac{1}{2}(1-\alpha_0) + \frac{(1+\alpha_0)}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right) + \frac{a}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2}$,

$G(a,\alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\sin^{-1}\frac{1+\alpha_0}{a} + \frac{1+\alpha_0}{a}\sqrt{1-\left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2}\right).$

$\mathbf{c_6}$)$1 \leq \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a}$.

$F(a,\alpha_0) = 1, \quad G(a,\alpha_0) = 0.$

Para estudiar las órbitas periódicas simétricas debemos poner $\alpha_0 = 0$. Obsérvese que $\beta_0 = F(a,0) = 0$. Entonces el método se traduce en resolver sólamente la ecuación

$$1 + W(i\omega)N(a) = 0, \tag{16}$$

donde

$$N(a) = \frac{\beta_1}{a} = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} \mathcal{S}(a\sin\theta)\sin\theta d\theta. \tag{17}$$

El método de balance de primer armónico **(PA)** consiste en encontrar las soluciones α_0 y $a, \omega > 0$ a (12)-(13) ((16) si $\alpha_0 = 0$). Las soluciones obtenidas $u_0(t) = \alpha_0 + a\sin\omega t$ son llamadas *órbitas periódicas del primer armónico* de (7). Si $\alpha_0 = 0$ ($\alpha_0 \neq 0$) la órbita periódica correspondiente es *simétrica (no simétrica)*. En tal caso es suficiente con estudiar la ecuación (16). Ya que $W(j\omega)$ es un número complejo, la expresión (16) consiste de 2 ecuaciones independientes y deben ser resueltas con respecto a a y ω para tener los parámetros que definen las soluciones periódicas aproximadas en la forma $u_0(t) = a\sin\omega t$. El coeficiente real $N(a)$ es llamado la *función descriptora* asociada a la función no lineal $\eta(\cdot)$ y en éste caso el método de balance armónico también es conocido como el *Método de la función descriptora* [Mees, 1981; Vidyasagar,1993]. El valor de la función $N(a)$ está dado por

$$N(a) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq a \leq 1 \\ \frac{2}{\pi}(\arcsin(1/a) + \frac{1}{a}\sqrt{1 - 1/a^2}) & \text{si} \quad a > 1 \end{cases} \tag{18}$$

Notar que $N(a)$ está definida sólo para $a > 0$, decreciendo para $a > 1$ y además satisface $0 < N(a) \leq 1$. Una órbita periódica del primer armónico correspondiente a $(\tilde{a}, , \widetilde{\omega})$ es estable (inestable) si [Llibre y Ponce, 1996]

$$\frac{d}{d\omega} Im(W(j\omega))|_{\omega=\widetilde{\omega}} > 0 (< 0) \tag{19}$$

De aquí que, observando el signo de la parte imaginaria de la función de transferencia $W(p)$ en los puntos de intersección dados por (16), se puede establecer la estabilidad de la órbita periódica del primer armónico.

Observación 3.1.2 *Cuando obtenemos una órbita periódica **PA** esta no necesariamente corresponde a una auténtica órbita periódica. Si las armónicas superiores generadas por el elemento no lineal se atenuan* *suficientemente por los elementos lineales, de manera que en la salida sólamente es significativa la componente de la armónica fundamental, entonces el Método de la Función Descriptora estará prediciendo verdaderas órbitas periódicas.(ver [Mees & Bergen, 1975; Vidyasagar,1993]).*

El Método debe verse como una herramienta útil para obtener información acerca de las posibles soluciones periódicas de un sistema de ecuaciones diferenciales, que en términos generales es un problema no resuelto.

4 Principales resultados

En un trabajo reciente, Llibre y Ponce [1996] utilizaron el principio de balance armónico (**PBA**) para describir la dinámica de sistemas de control en dos y tres dimensiones que están sujetos a retroalimentaciones de estado con saturación estabilizantes. En estos trabajos se puede encontrar una descripción completa de bifurcaciones de puntos de equilibrio y órbitas periódicas de primer armónico simétricas (con respecto al origen), encontrándose una gran variedad de comportamientos dinámicos. Aunque el método del **PBA** es aproximado y no muy riguroso, es usado con frecuencia para detectar órbitas periódicas de sistemas no lineales [Mees, 1981]. En [Aguirre *et al.*, 1997] mostramos que el método del **PBA** puede hacer predicciones razonablemente ciertas, en este caso predicciones acerca de comportamientos asintóticos en sistemas de control lineales sujetos a retroalimentación de estado con saturación de alta ganancia. Sin embargo, nuestros resultados deben ser vistos como resultados previos al estudio mediante métodos rigurosos de las bifurcaciones desplegadas por los sistemas de control. Algunos casos especiales de sistemas lineales por pedazos, como el modelo del circuito de Chua y otros sistemas, han sido estudiados usando métodos rigurosos [Chua et al., 1986; Chua & Tichonicky, 1991; Alvarez & Curiel, 1997]. Estos resultados sobre la dinámica de tales sistemas fueron obtenidos considerando mapeos de Poincaré, los cuales usualmente son muy difíciles de obtener en casos generales.

4.1 Presentación del problema

Estudiaremos un sistema tridimensional controlable, así que tomando en cuenta la observación sobre formas canónicas en la sección 3 y con la intención de simplificar las operaciones, consideraremos sistemas de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\mathcal{S}(k^T x), \tag{20}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

con $x \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{S}(u)$ está definida por la función de saturación (8) con $u(t) = k^T x(t)$ escogida de tal manera que $A + bk^T$ sea una matriz estable. Ya que $\sigma(A + bk^T) \subset \mathbb{C}^-$, el origen es un punto de equilibrio localmente asintóticamente estable de (20). Nuestro principal problema es estudiar la existencia de soluciones periódicas y las bifurcaciones en el número de órbitas periódicas cuando los parámetros (ganancias) del control cambian, pero se conserva la estabilidad del sistema a lazo cerrado.

Dado el vector de ganancias del controlador $k^T = (a_3 - d_3, a_2 - d_2, a_1 - d_1)$, la condición para la estabilidad asintótica en el origen del sistema (20) es la siguiente

$$d_1, d_3, d_1 d_2 - d_3 > 0.$$

Para estudiar la existencia de órbitas periódicas y bifurcaciones en el número de órbitas periódicas, proponemos la siguiente parametrización: Sea δ un número positivo, y definamos

$$d_1 = \delta c_1, \qquad d_2 = \delta^2 c_2, \qquad d_3 = \delta^3 c_3 \tag{22}$$

Ahora la condición de estabilidad en el origen es $c_1, c_3, c_1 c_2 - c_3 > 0$. Obsérvese que el sistema a lazo cerrado permanece estable para cualquier $\delta > 0$. La idea de la δ-parametrización es la siguiente: si $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ son las raíces del polinomio estable $t^3 + c_1 t^2 + c_2 t + c_3$ entonces los valores propios del sistema a lazo cerrado serán $\{\delta\lambda_1, \delta\lambda_2, \delta\lambda_3\}$; de esta manera sólo consideramos a δ como único parámetro de bifurcación y los valores propios a lazo cerrado se localizan en el semiplano izquierdo del plano complejo y tienen valor absoluto muy grande cuando δ es grande. Una parametrización con esta propiedad se dice que es una parametrización de alta ganancia.

4.2 Información del Método de Balance del Primer Armónico en Sistemas tridimensionales

En [Llibre and Ponce, 1996] se estudio el sistema (20) para el caso de tres dimensiones y se aplicó el método de la función descriptora para obtener el diagrama de bifurcación para la ecuación (9). Aquí, nosotros obtendremos también información acerca del sistema (20) y además incluiremos un estudio de las órbitas periódicas no simétricas, las cuales no fueron consideradas en [Llibre and Ponce, 1996].

Cuando las funciones $u(t) = \alpha_0 + a \sin \omega t$ y $\mathcal{S}(u(t)) = \beta_0 + \beta_1 \sin \omega t$ se reemplazan en (20), se obtiene la siguiente ecuación

$$\frac{d^3 x_1}{dt^3} + a_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + a_2 \frac{dx_1}{dt} + a_3 x_1 = \beta_0 + \beta_1 \sin \omega t.$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} x_1(t) = &\quad \tfrac{\beta_0}{a_3} + B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t \\ x_2(t) = &\quad B_1 \omega \cos \omega t - B_2 \omega \sin \omega t \\ x_3(t) = &\quad -B_1 \omega^2 \sin \omega t - B_2 \omega^2 \cos \omega t \end{aligned}$$

donde

$$B_1 = \frac{\beta_1 [a_3 - a_1 \omega^2]}{[a_3 - a_1 \omega^2]^2 + \omega^2 [a_2 - \omega^2]^2} y B_2 = \frac{-\beta_1 \omega [a_2 - \omega^2]}{[a_3 - a_1 \omega^2]^2 + \omega^2 [a_2 - \omega^2]^2}.$$

Entonces, si a_3 no es cero, las coordenadas de la solución $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ satisfacen las siguientes relaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{(x_1 - \frac{\beta_0}{a_3})^2}{\frac{\beta_1^2}{(a_3 - a_1\omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2 - a_2)^2}} + \dfrac{x_2^2}{\frac{\omega^2 \beta_1^2}{(a_3 - a_1\omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2 - a_2)^2}} = 1 \\ \\ \dfrac{x_2^2}{\frac{\omega^2 \beta_1^2}{(a_3 - a_1\omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2 - a_2)^2}} + \dfrac{x_3^2}{\frac{\omega^4 \beta_1^2}{(a_3 - a_1\omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2 - a_2)^2}} = 1 \\ \\ x_3 = -\omega^2 \left(x_1 - \frac{\beta_0}{a_3} \right). \end{array} \right. \tag{23}$$

Por tanto, las órbitas periódicas del primer armónico son elipses en el espacio 3-dimensional.

Para el estudio de órbitas periódicas simétricas, de la ecuación (16) obtenemos

$$1 + W(i\omega) = 1 - \frac{1}{N(a)} \in (-\infty, 0].$$

Veremos en la siguiente sección que los casos $\mathbf{c_1}$,$\mathbf{c_4}$ y $\mathbf{c_6}$ no proporcionan órbitas periódicas simétricas. Así que para el estudio de estas órbitas y considerando los casos $\mathbf{c_2}$,$\mathbf{c_3}$ y $\mathbf{c_5}$, de la ecuación (13) y la Proposición A.4 (en el Apéndice) obtenemos que

$$1 + W(i\omega) = 1 - \frac{1}{G(a, \alpha_0)} \in (-\infty, 0].$$

Si s no es un valor propio de A, entonces se satisface la identidad

$$1 + W(s) = \frac{\det(A+bc^T-sI)}{\det(A-sI)}.$$

Entonces podemos escribir $1 + W(i\omega) = r$, $r \leq 0$, es decir

$$1 + W(i\omega) = \frac{-i\omega^3 - d_1\omega^2 + d_2 i\omega + d_3}{-i\omega^3 - a_1\omega^2 + a_2 i\omega + a_3},$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} d_3 - d_1\omega^2 &= \left(a_3 - a_1\omega^2\right) r, \\ d_2 - \omega^2 &= \left(a_2 - \omega^2\right) r. \end{aligned} \tag{24}$$

Resolviendo, r y ω deben ser las raíces de los siguientes polinomios

$$(a_1 - d_1)\omega^4 + (d_3 - a_3 + d_1a_2 - a_1d_2)\omega^2 + a_3d_2 - a_2d_3 = 0, \tag{25}$$

$$(a_1a_2 - a_3)r^2 + (a_3 + d_3 - a_2d_1 - a_1d_2)r + d_1d_2 - d_3 = 0. \tag{26}$$

De esta manera, en caso de existir órbitas periódicas **PA,** entonces éstas estarán asociadas a las soluciones de (25) y (26). De modo que las siguientes parejas (r, ω^2), están asociadas a las soluciones (a, ω, α_0) de (12) y (13) (o (16) cuando $\alpha_0 = 0$).

$$\left\{ \begin{array}{l} r_+ = \\ \frac{-a_3-d_3+a_2d_1+a_1d_2+\sqrt{(-a_3-d_3+a_2d_1+a_1d_2)^2-4(a_1a_2-a_3)(d_1d_2-d_3)}}{2(a_1a_2-a_3)} \\ \\ \omega_-^2 = \\ \frac{a_3-d_3-d_1a_2+d_2a_1-\sqrt{(a_3-d_3-d_1a_2+d_2a_1)^2-4(a_1-d_1)(a_3d_2-a_2d_3)}}{2(a_1-d_1)} \end{array} \right. \tag{27}$$

$$(28)\quad \begin{cases} r_- = \\ \frac{-a_3-d_3+a_2d_1+a_1d_2-\sqrt{(-a_3-d_3+a_2d_1+a_1d_2)^2-4(a_1a_2-a_3)(d_1d_2-d_3)}}{2(a_1a_2-a_3)} \\ \\ \omega_+^2 = \\ \frac{a_3-d_3-d_1a_2+d_2a_1+\sqrt{(a_3-d_3-d_1a_2+d_2a_1)^2-4(a_1-d_1)(a_3d_2-a_2d_3)}}{2(a_1-d_1)} \end{cases}$$

Observación 4.2.1 *La primera consecuencia es que el sistema* (20) *tiene a lo más dos órbitas periódicas simétricas* ***PA*** *.*

4.3 No existencia de órbitas periódicas PA no simétricas

En la sección **3**, dividimos a las funciones $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$ en 6 casos(ver también el apéndice). En los siguientes resultados, descartamos algunos casos donde no pueden existir órbitas periódicas **PA** no simétricas.

Proposición 4.3.1 *Para las condiciones* $\mathbf{c_1}$*,* $\mathbf{c_4}$ *y* $\mathbf{c_6}$ *no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.*

Demostración: Para $\mathbf{c_1}$ las ecuaciones (12)-(13) corresponden a $\alpha_0 + W(0) = 0$ y $1 = 0$. Para $\mathbf{c_6}$ corresponden a $\alpha_0 - W(0) = 0$ y $1 = 0$. En $\mathbf{c_4}$ las ecuaciones son $\alpha_0 + W(0)\alpha_0 = 0$ y $1 + W(i\omega) = 0$. Ya que $\alpha_0 \neq 0$, entonces $1 + W(0) = 0$, pero por otra parte,

$$1 + W(0) = \frac{(0)^3 + d_1(0)^2 + d_2(0) + d_3}{(0)^3 + a_1(0)^2 + a_2(0) + a_3} = \frac{d_3}{a_3} \neq 0.$$

De aquí que para estos tres casos, no existan órbitas periodicas no simétricas del primer armónico.□

Proposición 4.3.2 *Sea* A *la matriz a lazo abierto definida como en* (21)*. Si* $a_3 > 0$*, entonces no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.*

Demostración: Ya que $W(0) = \frac{d_3-a_3}{a_3}$, de (12) tenemos que $\alpha_0 + \frac{d_3-a_3}{a_3}F(a, \alpha_0) = 0$. De aquí que $d_3 = -a_3\left(\frac{\alpha_0}{F(a,\alpha_0)} - 1\right)$. Como $a_3 > 0$ y $\frac{\alpha_0}{F(a,\alpha_0)} - 1 > 0$ (ver proposición 5.2.2), se sigue que $d_3 < 0$. Esto es una contradicción a la condición de estabilización $d_3 > 0$.□

El resultado en la proposición 4.3.2 es muy útil ya que proporciona un criterio para la no existencia de órbitas periódicas **PA** no simétricas en términos de la matriz A. Más específicamente, en términos del $\det(A) = -a_3$. El resultado es que una condición necesaria para la existencia de órbitas periódicas **PA** no simétricas es que $\det(A) > 0$. Tal condición puede reescribirse como que la matriz A debe tener un número par de valores propios con parte real negativa.

Corolario 4.3.3 *Considérese el sistema de control tridimensional* (20) *escrito en la forma canónica* (21) *con* $\det(A) \neq 0$. *Sea* $n_s(A)$ *el número de eigenvalores de la matriz* A *con parte real negativa. Entonces no pueden existir órbitas periódicas **PA** no simétricas si* $n_s(A) = 3$ *(el sistema no controlado es asintóticamente estable) o* $n_s(A) = 1$ *(el sistema no controlado tiene dos eigenvalores inestables).*

Como una consecuencia del resultado anterior, las órbitas periódicas **PA** no simétricas pueden existir sólamente si $n_s = 0$ o si $n_s = 2$. De aquí en adelante sólo consideraremos el caso $n_s = 0$, es decir, cuando todos los eigenvalores de A tienen parte real positiva.

4.4 Colapso de las órbitas periódicas simétricas PA

En [Suárez *et al,* 1995] se mostró que si el sistema a lazo abierto tiene todos sus eigenvalores con parte real estrictamente positiva (matriz estrictamente inestable), entonces la región de atracción es acotada y homeomórfica a la bola n-dimensional (a la bola 3-dimensional en este caso). Sobre la frontera de la **RA** hay 2 puntos de equilibrio, los cuales son repulsores. En esta sección predecimos la existencia de ciclos límite sobre la frontera de la **RA** del origen. Este es un resultado intuitivo ya que la frontera es homeomórfica a la esfera y los puntos de equilibrio sobre la frontera son repulsores.

Sea $(r(\delta), \omega(\delta))$ definida como en (27). Considérense sus coordenadas como funciones de δ y defínanse las funciones

$$\begin{aligned}
q(\delta) &= (a_3 - a_1\omega^2(\delta))^2 + \omega^2(\delta)(\omega^2(\delta) - a_2)^2, \\
p(\delta) &= \left[N^{-1}\left(\tfrac{-1}{r(\delta)-1}\right)\right]^2, \\
f(\delta) &= \tfrac{p(\delta)}{q(\delta)(r(\delta)-1)^2}, \\
g(\delta) &= \tfrac{p(\delta)\omega^2(\delta)}{q(\delta)(r(\delta)-1)^2}, \\
h(\delta) &= \tfrac{p(\delta)\omega^4(\delta)}{q(\delta)(r(\delta)-1)^2}
\end{aligned}$$

No es difícil ver que se satisfacen las siguientes relaciones

$$\frac{x^2}{f(\delta)}+\frac{y^2}{g(\delta)}, \qquad \frac{y^2}{g(\delta)}+\frac{z^2}{h(\delta)}=1, \quad z=-\omega^2(\delta)x.$$

Ahora obsérvese que las ecuaciones (25) y (26) tienen el mismo discriminante

$$(a_3+d_3-a_2d_1-a_1d_2)^2-4(a_1a_2-a_3)(d_1d_2-d_3).$$

Proposición 4.4.1 *Sea A la matriz a lazo abierto definida como en* (21)*. Si A es antiestable, es decir que a_1, $a_3, a_1a_2-a_3<0$ entonces existe sólo una órbita periódica simétrica del primer armónico determinada por la pareja (r,ω^2) definida en* (27)*.*

Demostración: De las desigualdades $a_1, a_3, a_1a_2-a_3<0$ tenemos que $-4(a_1a_2-a_3)(d_1d_2-d_3)>0$, lo cual implica
$|a_3+d_3-a_2d_1-a_1d_2|<$

$$\sqrt{(a_3+d_3-a_2d_1-a_1d_2)^2-4(a_1a_2-a_3)(d_1d_2-d_3)}.$$

De aquí que las raíces de (26) tengan diferente signo y la raíz r que satisface $r<0$ está definida por (27). Obsérvese que el signo positivo del discriminante de (26) implica la existencia de una órbita periódica simétrica del primer armónico.□

Ahora considérese la parametrización (22). Como vimos en la Proposición 4.4.1, existe una y sólo una $r<0$ (de aquí que una y sólo una ω^2) determinada por (27). También para esta parametrización especial r y ω^2 están dadas por

$$r_+=\frac{-a_3-c_3\delta^3+a_2c_1\delta+a_1c_2\delta^2+\sqrt{(-a_3-c_3\delta^3+a_2c_1\delta+a_1c_2\delta^2)^2-4(a_1a_2-a_3)(c_1c_2-c_3)\delta^3}}{2(a_1a_2-a_3)}$$

$$\omega_-^2=\frac{a_3-c_3\delta^3-a_2c_1\delta+a_1c_2\delta^2-\sqrt{(a_3-c_3\delta^3-a_2c_1\delta+a_1c_2\delta^2)^2-4(a_1-c_1\delta)(a_3c_2\delta^2-a_2c_3\delta^3)}}{2(a_1-c_1\delta)}. \tag{29}$$

De (29) y la proposición 5.3.1 se sigue que $\lim\limits_{\delta\to\infty} r_+(\delta)=1-\frac{c_1c_2}{c_3}$ (o $\lim\limits_{\delta\to\infty} W(i\omega_-(\delta)=\lim\limits_{\delta\to\infty} r_+(\delta)-1\to\frac{-c_1c_2}{c_3}$). De aquí que obtengamos el siguiente teorema.

Teorema 4.4.2 *Consideremos el sistema a lazo cerrado* (20) *escrito en la forma canónica* (21)*, con A antiestable. La única orbita periódica simétrica **PA** determinada por la proposición 4.4.1 tiene el siguiente comportamiento asintótico:*

*a) Cuando $\delta \to \infty$, la órbita periódica simétrica **PA** se colapsa al origen.*

*b) La órbita simétrica **PA** determinada en la proposición* 4.4.1 *es inestable.*

Demostración: La órbita periódica interna se colapsa al origen si $f(\delta), g(\delta), h(\delta) \to 0$ cuando $\delta \to \infty$. Sean a, ω_- las soluciones a (16) correspondientes al par (27), entonces $a = N^{-1}\left(\frac{-1}{r_+(\delta)-1}\right)$ o equivalentemente $N(a) = \frac{-1}{r_+(\delta)-1}$. Calculando el siguiente limite: $\lim_{\delta\to\infty} r_+(\delta) \to -\frac{(c_1c_2-c_3)}{c_3}$ (proposición 5.3.1) tenemos que lim $_{\delta\to\infty}$ $N(a) \to \frac{c_3}{c_1c_2}$. Así que

$$\lim_{\delta\to\infty} a^2N^2(a) = \left[N^{-1}\left(\frac{c_3}{c_1c_2}\right)\right]^2\left(\frac{c_3}{c_1c_2}\right)^2.$$

Por otra parte se tiene que $\lim_{\delta\to\infty} \frac{\omega_-^2(\delta)}{\delta^2} = \frac{c_3}{c_1}$ (proposición 5.3.1) implica que $\lim_{\delta\to\infty}\omega_-^2(\delta) = \infty$. Finalmente, observando que $q(\delta)$ es un polinomio de grado 3 en la variable $\omega_-^2(\delta)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to\infty} f(\delta) &= \lim_{\delta\to\infty} \frac{a^2N^2(a)}{q(\delta)} = 0,\\
\lim_{\delta\to\infty} g(\delta) &= \lim_{\delta\to\infty} \frac{a^2N^2(a)\omega_-^2(\delta)}{q(\delta)} = 0,\\
\lim_{\delta\to\infty} h(\delta) &= \lim_{\delta\to\infty} \frac{a^2N^2(a)\omega_-^4(\delta)}{q(\delta)} = 0.
\end{aligned}$$

b) Consideremos las siguientes funciones: $t(\omega) = (a_3 - a_1\omega^2)^2 + \omega^2(a_2-\omega^2)^2$ y $s(\omega) = a_3d_2 - a_2d_3 + (d_3 - a_3 + a_2d_1 - a_1d_2)\omega^2 + (a_1 - d_1)\omega^4$. Del lema 2.2.1 tenemos

$$ImW(i\omega) = \frac{\omega s(\omega)}{t(\omega)}.$$

Obsérvese que si a, ω es una solución de (16), entonces $ImW(i\omega) = 0$, es decir, $s(\omega) = 0$. Denotemos por $\omega^2 = \omega_-^2$ a la raíz de (25) correspondiente al par (27) y por $\omega^2 = \omega_+^2$ a la raíz correspondiente a (28) . Entonces, $s(\omega) = (a_1 - d_1)(\omega^2 - \omega_-^2)(\omega^2 - \omega_+^2)$. Así que
$s'(\omega_0) = (a_1 - d_1)2\omega_-(\omega_-^2 - \omega_+^2)$ y $s'(\omega_+) = (a_1 - d_1)2\omega_+(\omega_+^2 - \omega_-^2)$.
Primero considérese que

$$\frac{d}{d\omega}ImW(i\omega) = \frac{[\omega s'(\omega) + s(\omega)]t(\omega) - \omega s(\omega)t'(\omega)}{t^2(\omega)}$$

evaluando en ω_0 resulta

$$\frac{d}{d\omega}ImW(i\omega)|_{\omega_-} = \frac{\omega_- s'(\omega_-)t(\omega_-)}{t^2(\omega_-)} = \frac{\omega_- s'(\omega_-)}{t(\omega_-)}$$

Ya que $t(\omega_-) > 0$, obtenemos

$$\mathrm{sign}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{ImW}(\mathrm{i}\omega)\ |_{\omega=\omega_-}\right] = \mathrm{sign}[\mathrm{s}'(\omega_-)].$$

Obsérvese que la última igualdad implica que la estabilidad de la órbita interna está determinada por $s'(\omega_-)$. Por otra parte, de (27) y (28) obtenemos

$$\omega_-^2 - \omega_+^2 = -\frac{\sqrt{(a_3 - d_3 - d_1a_2 + d_2a_1)^2 - 4(a_1 - d_1)(a_3d_2 - a_2d_3)}}{a_1 - d_1}.$$

De aquí que

$$s'(\omega_-) = -2\omega_-\sqrt{(a_3 - d_3 - d_1a_2 + d_2a_1)^2 - 4(a_1 - d_1)(a_3d_2 - a_2d_3} < 0,$$

lo cual implica que la órbita periódica simétrica **PA** es inestable.□

Los resultados de esta sección implican las siguientes observaciones.

Observación 4.4.3 *Las retroalimentaciones de estado de alta ganancia se usan principalmente para rechazar perturbaciones [Morari and Zafiriou, 1989]. En nuestro caso, δ más grande rechaza perturbaciones más grandes. El teorema* 4.4.2 *prueba que las órbitas periódicas* ***PA*** *se colapsan al origen. Entonces la información de primer armónico parece indicar que el conjunto de puntos que pueden ser llevados al origen decrece cuando el sistema está sujeto a una retroalimentación de alta ganancia, y tiende a ser sólo el origen cuando δ es incrementa. Por lo tanto, para sistemas con entradas acotadas, el rechazo de perturbaciones grandes implica la reducción de la* ***RA*** *del origen.*

4.5 Posible rompimiento de una órbita simétrica

Como una diferencia de los sistemas estables a lazo abierto, para los sistemas estrictamente inestables a lazo abierto pueden existir al menos dos órbitas periódicas no simétricas **PA** cuando se satisface que $-1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1$ ($\mathbf{c_3}$). En esta sección, además, se muestran evidencias de una bifurcación de rompimiento de órbitas simétricas, es decir, bifurcaciones donde una órbita periódica simétrica (con respecto al origen) se rompe en 2 o más órbitas periódicas no simétricas. Para la condición $\mathbf{c_3}$ obsérvese que es suficiente considerar $\alpha_0 > 0$, $a > 1+\alpha_0$ ya que $F(a,-\alpha_0) = -F(a,\alpha_0)$ y $G(a,\alpha_0) = G(a,-\alpha_0)$. En otras palabras, la simetría del retrato fase reduce el problema a encontrar una solución que satisface $\alpha_0, a > 0$, de manera que tanto $u(t) = \alpha_0 + a\sin\omega t$ como $u(t) = -\alpha_0 + a\sin\omega t$ determinan órbitas periódicas del primer armónico. Para estudiar las órbitas periódicas no simétricas del primer armónico necesitamos encontrar las soluciones (a, ω, α_0) de (13), es decir

$$1 + W(i\omega) = 1 - \frac{1}{G(a,\alpha_0)} \in (-\infty, 0).$$

De aquí que sea necesario resolver $1 + W(i\omega) = r$, $r < 0$.

Las siguientes definiciones y lemas nos serán útiles para demostrar la existencia de órbitas periódicas no simétricas **PA**. Para $\alpha_0 > 0, a > 1 + \alpha_0$ definimos las funciones

$$\begin{aligned} \rho(a,\alpha_0) &= -\left(\tfrac{a_3}{c_3}\right)^{1/3}\left(\tfrac{\alpha_0}{F(a,\alpha_0)} - 1\right)^{1/3}, \\ H(a,\alpha_0) &= 1 + [r_+(\rho(a,\alpha_0)) - 1]G(a,\alpha_0). \end{aligned} \tag{30}$$

Nótese que $\rho(a,\alpha_0)) > 0$, ya que $a_3 < 0, d_3 > 0$ y $\frac{\alpha_0}{F(a,\alpha_0)} - 1 > 0$ (ver Proposición 5.2.2). La prueba del siguiente lema es inmediata.

Lema 4.5.1 *El par* $(\overline{a}, \overline{\alpha}_0)$ *es una solución a* (12) *si y sólo si* $\delta = \rho(\overline{a}, \overline{\alpha}_0)$.

Lema 4.5.2 *Sea* A *la matriz a lazo abierto definida como en* (21)*. Si* A *es estrictamente inestable (todos sus eigenvalores tienen parte real positiva) y* α_0 *es suficientemente pequeña, entonces existe* a *tal que* $a > 1 + \alpha_0$ *y* $H(a,\alpha_0) = 0$.

Demostración: Dado $\alpha_0 > 0$, la proposición 5.2.4 implica que
$\lim_{a\to\infty} F(a,\alpha_0) = 0$ y $\lim_{a\to\infty} G(a,\alpha_0) = 0$.
Entonces $\frac{\alpha_0}{F(a,\alpha_0)} \to \infty$ y $\rho(a,\alpha_0) \to \infty$ cuando $a \to \infty$, y por lo tanto $r_+(\rho(a,\alpha_0)) \to 1 - \frac{c_1c_2}{c_3}$ cuando $a \to \infty$. De aquí que

$$\lim_{a\to\infty} H(a,\alpha_0) = 1 + [-\frac{c_1c_2}{c_3}](0) = 1. \qquad (*)$$

Ahora analicemos $H(\alpha_0+1,\alpha_0) = 1+[r_+(\rho(\alpha_0+1,\alpha_0))-1]G(\alpha_0+1,\alpha_0)$. Por la proposition 5.3.1, $G(\alpha_0+1,\alpha_0) \to 1$ y $\frac{\alpha_0}{F(\alpha_0+1,\alpha_0)} \to 1$ cuando $\alpha_0 \to 0$. Entonces $\rho(a,\alpha_0) \to 0$ cuando $\alpha_0 \to 0$. Además, $r_+(\delta) \to -\frac{a_3}{a_1a_2-a_3}$ cuando $\delta \to 0$. De aquí que
$\lim_{\alpha_0\to 0} H(\alpha_0+1,\alpha_0) = 1+[-\frac{a_3}{a_1a_2-a_3}-1](1) = -\frac{a_3}{a_1a_2-a_3} < 0. \qquad (**)$
Como consecuencia de $(*)$ y $(**)$ y la continuidad de H se tiene que existe $a > 1+\alpha_0$ tal que $H(a,\alpha_0) = 0$.□

Definición 4.5.3 *Sea $\varepsilon_1 > 0$ tal que para toda $\alpha_0 \in (0,\varepsilon_1)$, existe $a > 1+\alpha_0$ que satisface $H(a,\alpha_0) = 0$. Definimos el conjunto R_{ε_1} como sigue:*

$$R_{\varepsilon_1} = \{(a,\alpha_0) : \alpha_0 \in (0,\varepsilon_1), \text{ y } a \text{ satisface que } a > 1+\alpha_0 \text{ y}$$
$$H(a,\alpha_0) = 0\}.$$

Nótese que por el lema anterior, $R_{\varepsilon_1} \neq \emptyset$. En el siguiente teorema mostraremos que si $n_s = 0$, entonces el sistema de control (20) exhibe órbitas periódicas **PA** no simétricas para ciertos valores de $\delta > 0$. Esta información puede verse como una evidencia de una bifurcación de rompimiento de órbitas simétricas.

Teorema 4.5.4 *Sea A la matriz a lazo abierto definida como en* (21)*. Si A es estrictamente inestable (todos sus eigenvalores tienen parte real positiva), se satisfacen las siguientes propiedades si los números a,α_0 satisfacen $-1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1$* ($\mathbf{c_3}$)*:*

*a) Para todo $\delta \in R = \{\rho(a,\alpha_0) : (a,\alpha_0) \in R_{\varepsilon_1}\}$ existen al menos dos órbitas periódicas no simétricas **PA**.*

*b) Para δ suficientemente pequeño o suficientemente grande no existen órbitas periódicas no simétricas **PA**.*

Demostración: **a).** Tomemos $\delta^* \in R$. Entonces $\delta^* = \rho(a^*,\alpha_0^*)$ y $\alpha_0^* \in (0,\varepsilon_1)$. Además, a^* satisface $a^* > 1+\alpha_0^*$ y $H(a^*,\alpha_0^*) = 0$. De aquí que $1+[r_+(\rho(a^*,\alpha_0^*))-1]G(a^*,\alpha_0^*)=0$. Como $\delta^*=\rho(a^*,\alpha_0^*)$ se tiene que $1+[r_+(\delta^*)-1]G(a^*,\alpha_0^*)$. Si escogemos $\omega^*=\omega_-(\delta^*)$ obtenemos que $(a^*,\alpha_0^*,\omega^*)$ satisface la ecuación (13). Por otra parte, la ecuación (12) se satisface ya que $\delta^*=\rho(a^*,\alpha_0^*)$.

b). Primero probaremos que si δ es suficientemente pequeño, entonces no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico. Si la ecuación (12) se satisface, entonces $\delta=\rho(a,\alpha_0)$ para alguna pareja (a,α_0). Sea $H(a,\alpha_0)$ como fue definida anteriormente. Veremos que $H(a,\alpha_0)\neq 0$ cuando $\delta\to 0$. Usando la proposición 5.2.5 obtenemos
$\lim_{\delta\to 0} H(a,\alpha_0)=\lim_{\alpha_0\to 0,a\to 1} 1+[r_+(\rho(a,\alpha_0))-1]G(a,\alpha_0)$

$$=-\frac{a_3}{a_1a_2-a_3}<0.$$

De aquí que la ecuación (13) no se satisface cuando δ es suficientemente pequeño y, por lo tanto, no hay órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Ahora probaremos que si δ es suficientemente grande, entonces no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico. Usando la proposición 5.2.6, $G(a,\alpha_0)$ es decreciente con respecto a α_0, así que $G(a,\alpha_0)<G(a,0)=N(a)$, donde $N(a)$ es la función descriptora. Sabemos que $N(a)\to 0$ cuando $a\to\infty$ y $G(a,\alpha_0)\in(0,1)$ (ver Proposición 5.2.3). Recuérdese que $\lim_{\delta\to\infty} W(i\omega_-(\delta))=-\frac{c_1c_2}{c_3}$. Si $\epsilon>0$, entonces existen δ_ϵ y a_ϵ tales que

si $\delta>\delta_\epsilon$, entonces $\left|W(i\omega_-(\delta))+\frac{c_1c_2}{c_3}\right|<\epsilon$,

si $a>a_\epsilon$, entonces $0<G(a,\alpha_0)<G(a,0)<\epsilon$.

Escogemos $\epsilon>0$ suficientemente pequeño para garantizar que $1+W(i\omega_-)G(a,\alpha_0)\approx 1$, es decir $1+W(i\omega_-)G(a,\alpha_0)\neq 0$ para todo $\delta>\delta_\epsilon$, $a>a_\epsilon$ y para todo $\alpha_0(\alpha_0+1<a)$. Sean

$$\overline{\delta}=-\left(\frac{a_3}{c_3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\pi 2\sin^{-1}\frac{1}{a_\epsilon}-1\right)^{\frac{1}{3}} \text{ y } \delta_0=\max(\delta_\epsilon,\overline{\delta}).$$

Mostraremos que si $\delta>\delta_0$, entonces no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Sean $\delta>\delta_0$ y a,α_0 tales que satisfacen (12). Entonces

$$\delta=-\left(\frac{a_3}{k_3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\alpha_0}{F(a,\alpha_0)}-1\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ es decir, } \frac{-k_3}{a_3}\delta^3+1=\frac{\alpha_0}{F(a,\alpha_0)}.$$

Usando la proposición 5.2.6, el mínimo valor de a es

$$a_{\min}=\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{2\left(\frac{-k_3}{a_3}\delta^3+1\right)}\right]}.$$

Ya que $\delta>\delta_0=\max(\delta_\epsilon,\overline{\delta})$, se tiene que $\delta>\overline{\delta}$ y usando que la función $f(x)=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2x}}$ ($x>\frac{1}{2}$) es creciente cuando x es suficientemente grande tenemos

$$\frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{2\left(\frac{-k_3}{a_3}\delta^3+1\right)}\right]} > \frac{1}{\sin\left[\frac{\pi}{2\left(\frac{-k_3}{a_3}\overline{\delta}^3+1\right)}\right]} = a_\epsilon.$$

Entonces $a \geq a_{\min} > a_\epsilon$. De aquí que si $\delta > \delta_0$ y a, α_0 son soluciones de (12), entonces $a > a_\epsilon$. Como $\delta > \delta_0 = \max(\delta_\epsilon, \overline{\delta})$, entonces $\delta > \delta_\epsilon$. En consecuencia, $1 + W(i\omega_-)G(a, \alpha_0) \neq 0$ y la ecuación (13) no se satisface y, por lo tanto, no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.□

Observación 4.5.5 *Desde el punto de vista de una aproximación del primer armónico, las órbitas que se predijeron en los teoremas* 4.4.2 *y* 4.5.4 *se localizan sobre la frontera de la región de atracción del origen,* $\Omega(0)$. *Cuando* $\delta \to \infty$, *la órbita periódica simétrica* ***PA*** *se contrae al origen, y ya que tal órbita periódica es inestable, este fenómeno parece conducir al colapso de la región de atracción. Por otra parte, podemos encontrar órbitas periódicas no simétricas* ***PA*** *para valores arbitrariamente pequeños de* α_0 *(teorema* 4.5.4.a*). De aquí que conjeturamos que tales órbitas periódicas no simétricas aparecen debido a una bifurcación que consiste en el rompimiento de una órbita simétrica. Esto está basado en el hecho de que para valores pequeños y para valores grandes del parámetro* $\delta > 0$, *el sistema de control tiene una órbita periódica (ésta órbita es la predicha en el teorema* 4.4.2*), y cuando la razón de convergencia al origen es aumentada (por el incremento del valor del parámetro* δ*), la órbita periódica simétrica* ***PA*** *se bifurca para producir al menos tres órbitas: una órbita periódica simétrica* ***PA*** *más dos órbitas periódicas no simétricas* ***PA***. *Todas estas órbitas están localizadas sobre la frontera de la región de atracción del origen.*

4.6 Conclusiones

En éste trabajo usamos el método de balance de primer armónico para estudiar sistemas de control lineales sujetos a una retroalimentación de alta ganancia con saturación. En particular, describimos la existencia de órbitas periódicas no simétricas desde el punto de vista de una aproximación de primer armónico en sistemas tridimensionales. En sistemas con uno o con tres eigenvalores a lazo abierto con parte real negativa, por ejemplo, no existen órbitas periódicas no simétricas del primer armónico. Cuando todos los eigenvalores a lazo abierto tienen parte real positiva demostramos la presencia de órbitas periódicas no simétricas (de primer armónico) para ciertos valores del parámetro de alta ganancia. Ya que tales órbitas no simétricas no existen para valores pequeños ni para valores grandes del parametro, entonces esto puede interpretarse como una evidencia de una bifurcación que consiste en el rompimiento de órbitas simétricas.

5 Apéndice

En este apéndice hemos incluido sin demostración una lista de resultados técnicos.

5.1 Cálculo de las funciones $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$

Para calcular $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$ debemos considerar 6 casos diferentes:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{c_1)} \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} \leq -1, & \mathbf{c_2)} \frac{-1-\alpha_0}{a} \leq -1 < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1, \\ \mathbf{c_3)} -1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a} < 1, & \mathbf{c_4)} \frac{-1-\alpha_0}{a} \leq -1 < 1 \leq \frac{1-\alpha_0}{a}, \\ \mathbf{c_5)} -1 < \frac{-1-\alpha_0}{a} < 1 \leq \frac{1-\alpha_0}{a} \quad \text{y} & \mathbf{c_6)} 1 \leq \frac{-1-\alpha_0}{a} < \frac{1-\alpha_0}{a}. \end{array}$$

Lema 5.1.1 *El valor de $F(a, \alpha_0)$ y $G(a, \alpha_0)$ para cada uno de estos casos son los siguientes:*

c_1) $F(a, \alpha_0) = 1, \quad G(a, \alpha_0) = 0.$

c_2) $F(a, \alpha_0) = \frac{1}{2}(1 + \alpha_0) - \frac{(1-\alpha_0)}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} - \frac{a}{\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2},$

$G(a, \alpha_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{(1-\alpha_0)}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2}\right).$

c_3) $F(a, \alpha_0) = \frac{1+\alpha_0}{\pi} \sin^{-1} \frac{1+\alpha_0}{a} - \frac{1-\alpha_0}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{a}{\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} - \frac{a}{\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2},$

$G(a, \alpha_0) = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1+\alpha_0}{a} + \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1-\alpha_0}{a} + \frac{1+\alpha_0}{a\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} + \frac{1-\alpha_0}{a\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2}.$

c_4) $F(a, \alpha_0) = \alpha_0, \quad G(a, \alpha_0) = 1.$

c_5) $F(a, \alpha_0) = -\frac{1}{2}(1 - \alpha_0) + \frac{(1+\alpha_0)}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right) + \frac{a}{\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2},$

$G(a, \alpha_0) = +\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(\sin^{-1} \frac{1+\alpha_0}{a} + \frac{1+\alpha_0}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2}\right).$

c_6) $F(a, \alpha_0) = 1, \quad G(a, \alpha_0) = 0.$

5.2 Resultados Técnicos

Las siguientes proposiciones son útiles para probar la existencia o no existencia de órbitas periódicas no simétricas del primer armónico.

Proposición 5.2.1 *Dada $F(a,\alpha_0)$ como en el lema 5.1.1 se cumple lo siguiente*

a) Para $\mathbf{c_2)}$ *tenemos que* $F(a,\alpha_0) > 0$ *y* $F(a,\alpha_0) - \alpha_0 < 0$.

b) Para $\mathbf{c_3)}$ *tenemos que* $F(a,\alpha_0) > 0$ *y* $F(a,\alpha_0) - \alpha_0 < 0$ *si* $\alpha_0 > 0$, *o* $F(a,\alpha_0) < 0$ *y* $F(a,\alpha_0) - \alpha_0 > 0$ *si* $\alpha_0 < 0$.

c) Para $\mathbf{c_5)}$ *tenemos que* $F(a,\alpha_0) < 0$ *y* $F(a,\alpha_0) - \alpha_0 > 0$.

Se tiene el siguiente corolario a la Proposición 5.2.1.

Proposición 5.2.2 *Dado $F(a,\alpha_0)$ como en el lema 5.1.1 se cumple que*

$$\tfrac{\alpha_0}{F(a,\alpha_0)} - 1 > 0.$$

Proposición 5.2.3 *Dado $G(a,\alpha_0)$ como en el lema 5.1.1, para* $\mathbf{c_2)}$, $\mathbf{c_3)}$ *y* $\mathbf{c_5)}$ *se cumple que* $\mathrm{Im}G(a,\alpha_0) = (0,1)$.

Proposición 5.2.4 *Sean F y G con a y α_0 que satisfacen* $\mathbf{c_3)}$. *Entonces*
a) Cuando α_0 es constante se sigue que

$$\lim_{a\to\infty} \frac{a}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{1+\alpha_0}{a}\right)^2} - \frac{a}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{1-\alpha_0}{a}\right)^2} = 0,$$

y que $\lim_{a\to\infty} F(a,\alpha_0) = 0$ *y* $\lim_{a\to\infty} G(a,\alpha_0) = 0$.
b) Por otra parte, si $\alpha_0 \to 0^+$, entonces $G(\alpha_0+1,\alpha_0)$ y $\frac{\alpha_0}{F(\alpha_0+1,\alpha_0)}$ tienden a 1.

Proposición 5.2.5 *Supongamos $\alpha_0 > 0$ y que se cumple* $\mathbf{c_3)}$ *y considérese la función $\rho(a,\alpha_0) = -\left(\frac{a_3}{c_3}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\alpha_0}{F(a,\alpha_0)} - 1\right)^{\frac{1}{3}}$. Si δ está próximo al cero entonces α_0 está próximo al cero y a esta próximo al 1.*

Proposición 5.2.6 *Sean $F(a,\alpha_0)$ y $G(a,\alpha_0)$ como en* $\mathbf{c_3)}$.
a) Si $\alpha_0 > 0$ entonces $F(a,\alpha_0) - \alpha_0 \frac{d}{\partial\alpha_0}F(a,\alpha_0) < 0$ y $\frac{dG}{\partial\alpha_0} < 0$.
b) Supongase que la constante $N > 0$ y los números a y α_0 satisfacen que $N = \frac{\alpha_0}{F(a,\alpha_0)}$. Entonces el valor mínimo que puede tomar a es $a = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2N}}$.

5.3 Propiedades asintóticas de r y ω^2

Cuando se considera la parametrización (22), r y ω^2 tienen importantes propiedades asintóticas que pueden obtenerse calculando algunos límites. Las propiedades a las que nos referimos son las siguientes.

Proposición 5.3.1 *La pareja* r_+, ω_-^2 *definida en* (27) *satisface:*

a) $r_+(\delta) \to -\frac{(c_1 c_2 - c_3)}{c_3}$ *cuando* $\delta \to \infty$,

b) $\frac{\omega_-^2(\delta)}{\delta^2} \to \frac{c_3}{c_1}$ *cuando* $\delta \to \infty$.

Agradecimientos

El autor desea expresar su agradecimiento al Dr. Rodolfo Suárez Cortés y al Dr. José Alvarez Ramírez por su apoyo en esta investigación

Baltazar Aguirre Hernández
División de Ciencias Básicas e Ingeniería,
Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,
Apdo. Postal 55-534, 09000 México, D.F., México,
bahe@xanum.uam.mx

Referencias

[1] Aguirre, B., Alvarez-Ramírez, J., Fernández, G. and Suárez, R. [1997] First harmonic analysis of linear control systems with high-gain saturated feedback. *Int. J. of Bifur. & Chaos,* **Vol. 7,** No. 11, 2501-2510.

[2] Aizerman, M. A. [1963] *Theory of Automatic Control.* Traducido al inglés por Ruth Feinstein. Addison-Wesley. Massachusetts, U.S.A. La versión original en ruso bajo el título *Lektsiyi po teoriyi avtomaticheskgo regulirovaniya,* la publicó Fiztmatgiz, Moscow, en 1958.

[3] Alvarez, J. and Curiel, L. [1997] Bifurcation and chaos in a linear control system with saturated input. *Int. J. of Bifur. & Chaos,* **Vol. 7,** No. 8, 1811-1822.

[4] Alvarez, J., Suárez, R. and Alvarez, J. [1993] Planar linear systems single saturated feedback. *Syst. Contr. Lett.* **20,** 319-326.

[5] Andronov, A., A Khaikin, S. E. and Vitt; A. A. [1937] *Teoriya Kolyebanii.* Ob'ed. nauch. tekh. inst. Traducción al inglés editada por S. Lefschetz con el título 'Theory of Oscillations". Princeton Press, Princeton N. J., 1949.

[6] Barnett, S. and Cameron, R. G. [1985] *Introduction to Mathematical Control Theory* (Clarendon Press, Oxford).

[7] Basso, M., Genesio, R. and Tesi, A. [1997] A frequency method for predicting limit cycle bifurcations. *Nonlinear Dynamics,* **13,** 339-360.

[8] Chua, L. O., Komuro, M. and Matsumoto, T. [1986] The double scroll family. *IEEE Trans. Circ. Syst.,* **33**, 1072-1118.

[9] Chua, L. O. and Tichonicky, I. [1991] One dimensional map for the double scroll family. *IEEE Trans. Circuit Syst.* **CAS-38**, 233-243.

[10] Genesio, R. and Tesi, A. [1992] A harmonic balance approach for chaos prediction: Chua's circuit, *Int. J. of Bif. Chaos* ,**2**, 61-79.

[11] Genesio, R. and Tesi, A. [1992] Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems. *Automatica,* **Vol. 28,** No. 3, 531-548.

[12] Goldfarb, L. C. [1947] On some nonlinear phenomena in regulatory systems. *Autom. Telemekh.* **8**, 349-383.

[13] Johnson, E. C. [1952] Sinusoidal analysis of feedback control systems containing nonlinear elements. *Trans. Am. Inst. Electr. Eng. Part 2* **71,** 169-181.

[14] Kahlert, C. and Rossler, O. E. [1985] Analytical properties of Poincare half maps in a class of piecewise-linear dynamical systems. *Z. Naturforsch,* **40a.**, 1011-1025.

[15] Kochenburger, R. J. [1950] A frequency response method for analysing and synthesizing contactor servomechanisms. *Trans. Am. Inst. Electr. Eng. Part 2* **69,** 270-283.

[16] Krenz, G. S. and Miller, R.K. [1986] Qualitative analysis oscillations in nonlinear control systems. A describing function approach, *IEEE Trans. Circ. Syst.* **CAS-33**, 562-566.

[17] Llibre, J. and Ponce, E. [1996] Global first harmonic bifurcation diagram for nonlinear control systems, *Dynamics* & *Stability of Systems* **11**, 49-88.

[18] Mees, A.I. [1981] *Dynamics of Feedback Systems* (J. Wiley and Sons, New York).

[19] Mees, A. I. and Bergen, A. R. [1975] Describing functions revisited. *IEEE Trans. on Autom. Contr.* **Vol. AC-20,** No. 4, 473-478.

[20] Moiola, J. L. and Chen, G. [1993] Frequency domain approach to computation and analysis of bifurcations and limit cycles: A tutorial, *Int. J. of Bifur. & Chaos* **3**(4), 843-867.

[21] Moiola, J. L. and Chen, G. [1996] *Hopf Bifurcations Analysis: A Frequency Domain Approach* (World Scientific Pub. Co. , Singapore).

[22] Morari, M. and Zafiriou, E. [1989] *Robust Process Control* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.)

[23] Suárez, R., Alvarez, J. and Alvarez, J. [1995] Regions of attraction of closed loop linear systems with saturated linear feedback. *J. Math. Syst. Contr.* **Vol. 5,** No. 4, 491-494. First version published in [1991] *Proc. Conf. Dec. Control,* Brighton, England, **1**, 223-228.

[24] Tesi, A., Abed, E., Genesio, R. and Wang, O. [1996] Harmonic balance analysis of period-doubling bifurcations with implications for control of nonlinear dynamics. *Automatica,* **Vol. 32,** No. 9, 1255-1271.

[25] Vidyasagar, M. [1993] *Nonlinear Systems Analysis.* Prentice Hall, New Jersey.

[26] Wonham, W.M. [1985]. *Linear multivariable control. A Geometric Approach.* Springer-Verlag, New York.