Morfismos, Vol. 3, No. 2, 1999, pp. 57–68

FORMAS BILINEALES EN ÁLGEBRAS DE LIE Y ACCIONES DE GRUPOS.

Francisco Gabriel Hernández Zamora [1]

Resumen

El objetivo de estas páginas es analizar casos donde la única forma bilineal $Ad(G^*)$-invariante en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, con grupo de Lie adjunto G^*, es la forma de Killing salvo multiplicación por una constante. También se muestra una relación de esta propiedad con la geometría de los grupos de Lie.

1991 Mathematics Subject Clasification: 22E60, 53C10.
Keywords and phrases: Grupo de Lie, algebra de Lie, grupo adjunto, representaciones de álgebras de Lie, variedad pseudo-Riemanniana.

1 Introducción

Una parte importante de la geometría, así como de todas las ramas de la matemática, es el problema de la clasificación de los objetos de estudio. Dentro de la geometría estamos interesados en considerar un espacio topológico (Hausdorff y segundo numerable) y determinar las posibles estructuras geométricas que se le pueden asociar. Por ejemplo resultados como el siguiente son conocidos (ver [5, pág.158]): Una variedad Riemanniana compacta con curvatura no positiva no admite estructuras geométricas arbitrarias, a saber una métrica h de curvatura no negativa solo puede ser plana.

También se tienen clasificaciones completas de los espacios de curvatura constante (ver [6, pág.135]), y de su generalización "natural" a espacios simétricos (ver [2]), la cual es dada a través de los grupos de Lie semisimples.

[1]Estudiante de Doctorado, Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN. Becario del CONACyT.

En estas páginas se estudian las posibles estructuras geométricas biinvariantes que pueden tener algunos grupos de Lie simples (ver corolario 3.1.3), observando que en el álgebra de Lie simple asociada a ciertos grupos la única forma bilineal $Ad(G^*)$-invariante es la forma de Killing salvo multiplicación por una constante (ver proposición 3.1.2). En particular como consecuencia se obtendrá tal conclusión para un grupo de Lie simple compacto, que es un resultado bien conocido.

Por último hago mención del curso de estas páginas. En la sección 2 se da un repaso de conceptos y resultados de grupos de Lie y álgebras de Lie. En la sección 3 se ve el resultado principal que es la proposición 3.1.2. Finalmente se dan algunos comentarios respecto a la posible relación con trabajos recientes.

2 Grupos de Lie y Álgebras de Lie

La notación empleada y los resultados de esta sección son tomados principalmente de [2],[3],[11] y [12]. K denotará un campo de característica cero.

2.1 Definiciones y Resultados Básicos

Un *grupo de Lie* es una variedad analítica con una estructura de grupo tal que las operaciones del grupo son analíticas. Como ejemplos de grupos de Lie tenemos los siguientes:

1. $\mathbb{R}^n$ el grupo aditivo es un grupo de Lie.

2. G =Isom($\mathbb{R}^2$) el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^2$.

3. $GL(n;\mathbb{R})$ el grupo de matrices $n \times n$ no singulares con la multiplicación de matrices y la estructura analítica heredada como subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$.

4. El grupo ortogonal, $O(n) = \{g \in GL(n;\mathbb{R}) : g^t g = I\}$.

5. El grupo unitario, $U(n) = \{g \in GL(n;\mathbb{C}) : \bar{g}^t g = I\}$.

El grupo de Lie en el último ejemplo es definido por matrices complejas, pero este grupo de Lie no es una variedad compleja.

Un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre un campo K, se llama *álgebra de Lie* sobre K si hay una función bilineal (llamada operación de *corchetes*) $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisface:

i. $[X,Y]=-[Y,X]$ para $X,Y\in\mathfrak{g}$ (antisimetría)

ii. $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ para $X,Y,Z\in\mathfrak{g}$ (identidad de Jacobi)

Algunos ejemplos de álgebras de Lie son los siguientes:

1. El espacio vectorial $\mathfrak{g}=\mathbb{R}^3$ con la operación de corchetes definida por el producto cruz en $\mathbb{R}^3$: para $u,v\in\mathbb{R}^3$ $[u,v]=u\times v$.

2. Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial sobre K. Definimos para cada $X,Y\in\mathfrak{g}$ $[X,Y]=0$, entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie llamada *álgebra de Lie abeliana.*

3. Sea V un espacio vectorial sobre K. El espacio $\mathfrak{gl}(V)$ de endomorfismos de V, con la operación de corchetes $[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X$, es un álgebra de Lie.

4. *Álgebra de Lie asociada a un grupo de Lie G.* Para $\sigma\in G$ la traslación por la izquierda $L_\sigma : g\mapsto \sigma g$ de G sobre G es un difeomorfismo analítico. Dado un vector tangente $X\in T_eG$, hay un único campo vectorial invariante bajo cada L_σ (i.e. invariante por la izquierda) $\tilde{X}$ sobre G tal que $\tilde{X}_e=X$. En campos vectoriales se tiene la operación de corchetes y los campos vectoriales invariantes por la izquierda son cerrados bajo los corchetes. Es decir, si $\tilde{X}$ y $\tilde{Y}$ son campos vectoriales invariantes por la izquierda, entonces $[\tilde{X},\tilde{Y}]$ es un campo vectorial invariante por la izquierda, y en el espacio vectorial T_eG definimos los corchetes por $[X,Y]\doteq[\tilde{X},\tilde{Y}]_e$ convirtiéndolo en un álgebra de Lie, que denotamos por $\mathfrak{g}$ ó Lie(G). El álgebra de Lie aquí dada es definida sobre $\mathbb{R}$.

Un *homomorfismo* entre dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ es una transformación lineal $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ que preserva la operación de corchetes, es decir $\rho([X,Y])=[\rho(X),\rho(Y)]$.

Una *representación* de un álgebra de Lie en un espacio vectorial V es un homomorfismo de álgebras de Lie $\rho:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$. Tal representación se dice *irreducible* si los únicos subespacios $\rho(\mathfrak{g})$-invariantes de V son los triviales. De la identidad de Jacobi vemos que el mapeo lineal $X\mapsto ad(X)\doteq[X,\cdot]$ es una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, llamada *representación adjunta.*

Herramientas importantes para clasificar álgebras de Lie son la complexificación de un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$, así como el álgebra de Lie compleja asociada a ciertas álgebras de Lie sobre $\mathbb{R}$ [2, secc.1 cap.X]. La primera se define a continuación: Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$, el endomorfismo $J : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, dado por $J(X,Y) = (-Y,X)$ es una estructura compleja (i.e. endomorfismo con $J^2 = -Id$) en $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ que convierte a $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ en un espacio vectorial complejo, denotado por $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Se define la operación de corchetes por: $[X+iY, Z+iT] = [X,Z] - [Y,T] + i([Y,Z] + [X,T])$, que hace a $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$ llamada *complexificación* de $\mathfrak{g}$. Para la segunda, una *estructura compleja* en un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ es un endomorfismo $\mathbb{R}$-lineal J de $\mathfrak{g}$ tal que $J^2 = -Id$ y que cumple además $[X, JY] = J[X,Y]$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$. Cuando tal J existe, se define $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ como el *álgebra de Lie compleja asociada a* $\mathfrak{g}$ tomando $(a+ib)X = aX + bJX$ para $X \in \mathfrak{g}$ y $a, b \in \mathbb{R}$; y la operación de corchetes es la heredada de $\mathfrak{g}$. Nótese que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ no es más que $\mathfrak{g}$ como conjunto y que $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ y así $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$ es par. También es posible considerar un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$ como álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$, y por tanto tiene asociado un grupo de Lie que es de hecho un grupo de Lie complejo, es decir una variedad compleja además de analítica.

En el ejemplo 4 de álgebras de Lie se menciona que un grupo de Lie G tiene asociada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$. Para estudiar la relación entre la estructura de estos dos objetos se emplea el mapeo exponencial exp: $\mathfrak{g} \to G$ el cual lleva líneas rectas que pasan por el origen en $\mathfrak{g}$ a subgrupos uniparamétricos de G. Formalmente el mapeo exponencial se define de la siguiente manera: Para $X \in \mathfrak{g}$, hay un único homomorfismo analítico θ_X de $\mathbb{R}$ en G (i.e. un único subgrupo uniparamétrico) tal que $\theta'_X(0) = X$ [2, cor.1.5 secc.1 cap.II]. El *mapeo exponencial* es dado por $X \mapsto \exp X \doteq \theta_X(1)$.

Para el grupo de Lie $GL(n;\mathbb{R})$, cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$ que se identifica con las matrices reales $n \times n$, el mapeo exponencial no es más que la exponencial de matrices $\exp X = \mathrm{e}^X$ para $X \in \mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$.

Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de un grupo de Lie G. Para $\sigma \in G$, tenemos un isomorfismo analítico de G sobre él mismo dado por $I_\sigma : g \to \sigma g \sigma^{-1}$. Se define $Ad(\sigma) \doteq dI_\sigma$. El mapeo $\sigma \mapsto Ad(\sigma)$ es un homomorfismo analítico de G en $GL(\mathfrak{g})$ llamado la *representación adjunta* de G, que satisface $Ad(\exp X) = \mathrm{e}^{adX}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ G & \xrightarrow[Ad]{} & GL(\mathfrak{g}). \end{array}$$

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie (sobre K), la *forma de Killing* de $\mathfrak{g}$ es la forma bilineal simétrica $B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to K$, dada por $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) := Tr(adX\circ adY)$. Se comprueba de manera fácil que la forma de Killing es $Ad(G)$-invariante, es decir que para toda $\sigma \in G, B_{\mathfrak{g}}(Ad(\sigma)\cdot, Ad(\sigma)\cdot) = B_{\mathfrak{g}}(\cdot,\cdot)$.

En el caso de $SL(n+1;\mathbb{R})$ la forma de Killing para su álgebra de Lie $\mathfrak{s}l(n+1;\mathbb{R})$ está dada por $B_{\mathfrak{s}l(n+1;\mathbb{R})}(X,Y) = 2(n+1)Tr(XY)$ con $X,Y \in \mathfrak{s}l(n+1;\mathbb{R})$.

Dentro de la teoría básica es fácil ver que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ y $B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}$ es la forma de Killing de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ y $B_{\mathfrak{g}}$ la de $\mathfrak{g}$, entonces en $\mathfrak{g}$ estas coinciden: $B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}|_{\mathfrak{g}} = B_{\mathfrak{g}}$.

2.2 Álgebras de Lie semisimples

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, un subespacio $\mathfrak{a}$ se llama *subálgebra* si $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \subseteq \mathfrak{a}$. Y se llama *ideal* si $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$.

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre K se dice *semisimple* si su forma de Killing $B_{\mathfrak{g}}$ es no degenerada. Y se dice *simple* si sus únicos ideales son los triviales. Un grupo de Lie se llama semisimple (o simple) si su álgebra de Lie lo es. Cada álgebra de Lie semisimple se puede escribir como suma directa de ideales simples en ella.

Por otro lado, en un grupo de Lie G semisimple la forma de Killing es invariante bajo automorfismos, esto es que $B_{\mathfrak{g}}(\sigma X, \sigma Y) = B_{\mathfrak{g}}(X,Y)$ para $\sigma \in$Aut$(\mathfrak{g})$, y define un producto interno en $T_eG = \mathfrak{g}$, que es $Ad(G)$-invariante, y entonces se desplaza por traslaciones izquierdas a todo G obteniendo una estructura pseudo-Riemanniana en G la cual es invariante por traslaciones izquierdas y derechas (i.e. biinvariante). Esto nos permite estudiar los grupos de Lie desde el punto de vista de la geometría.

Si en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ hay formas bilineales simétricas $Ad(G)$-invariantes además de los múltiplos de $B_{\mathfrak{g}}$, entonces tendríamos más estructuras geométricas biinvariantes. En la siguiente sección se ven casos donde ésto ya no es posible.

Para probar lo anterior usaremos el siguiente resultado. Consideremos una representación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un espacio vectorial de dimensión finita V sobre $\mathbb{C}$, i.e. $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ homomorfismo con $\rho(X) : V \to V$ lineal.

Lema 2.2.1 (Lema de Schur) *Si ρ es una representación irreducible de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{C}$, entonces una transformación lineal A que conmuta con cada $\rho(X)$ ($X \in \mathfrak{g}$) es un multiplo escalar de la identidad I. Es decir, si para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\rho(X)A = A\rho(X)$, entonces $A = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Demostración: Sean V el espacio donde se representa ρ y λ un eigenvalor de A. Sea $V_1 = \{v \in V : Av = \lambda v\}$, entonces $V_1 \neq \{0\}$. Si $v \in V_1$, entonces $A(\rho(X)v) = \rho(X)(Av) = \lambda\rho(X)v$. Por lo que $\rho(X)v \in V_1$. Así V_1 es $\rho(\mathfrak{g})$-invariante, y como ρ es irreducible $V_1 = V$. Luego $A = \lambda I$.

$\square$

Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semisimple sobre $\mathbb{R}$ es posible asociarle un grupo de Lie de manera "natural", en el sentido de que podemos encajarlo en $GL(\mathfrak{g})$. Más precisamente lo damos a continuación. Dado que $\mathfrak{g}$ es semisimple, la representación adjunta $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ es un encaje, así que $\mathfrak{g}$ se ve como una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Siendo $GL(\mathfrak{g})$ un grupo de Lie asociado a $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, Helgason en [2, Teor.2.1 Cap.II] nos dice que hay un único subgrupo de Lie conexo G^* de $GL(\mathfrak{g})$ con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. G^* se llama el *grupo adjunto*. Este grupo es cerrado y tiene centro trivial (ver por ejemplo [2, Secc.2 Cap.II]). Se tiene de nuevo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle \exp = e|_{\mathfrak{g}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle e} \\ G^* & \xrightarrow[Ad]{} & GL(\mathfrak{g}). \end{array}$$

También utilizaremos las siguientes propiedades de la representación adjunta.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ y consideremos su complexificación $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ como álgebra de Lie real. Tenemos el grupo adjunto $\bar{G}^*$ asociado y el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \arrow[r, "ad_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \arrow[d, "\mathrm{e}"] \\ \bar{G}^* \arrow[r, "Ad_{\bar{G}^*}"'] & GL(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}). \end{tikzcd}$$

Por otro lado $GL(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ y este último es un espacio vectorial. Se puede probar que el grupo adjunto se describe como los ceros de una familia de polinomios, y en este sentido se dice que $\bar{G}^*$ es un *grupo algebraico.* De hecho todo grupo de Lie semisimple es un grupo algebraico salvo por un recubrimiento. Se puede probar que G^* es un conjunto de $\mathbb{R}$-puntos y de allí se deduce que es denso en la topología de Zariski ([14, teor.3.1.9] ó [4, prop.7 secc.9 cap.II]).

También puede verse que la siguiente acción es algebraica.

$$\bar{G} \times \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$$

$$(\bar{\sigma}, U) \longmapsto Ad(\sigma)UAd(\sigma)^{-1}.$$

3 Formas bilineales invariantes

Dada un álgebra de Lie simple real $\mathfrak{g}$, puede verse en [2, prop.1.5 secc.1 cap.X] que hay dos posibilidades:

1. $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ no es simple, en cuyo caso $\mathfrak{g}$ admite una estructura compleja J que la hace álgebra de Lie compleja simple $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

2. $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ es simple.

En el primer caso observamos lo siguiente. Sean $K_{\mathfrak{g}}$ y K las formas de Killing de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ coinciden como conjuntos y el grupo adjunto, como se definió en la sección 2.2, es para ambas el mismo G^*. Por otro lado, $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ es una representación lineal compleja, además de ser real, por lo que $Ad(\sigma)$ y la estructura compleja J conmutan.

Sabemos también que tanto $K_{\mathfrak{g}}$ como K son $Ad(G^*)$-invariantes y están relacionadas por

$$K(X,Y) = \frac{1}{2}K_{\mathfrak{g}}(X,Y) + \mathrm{i}(-\frac{1}{2}K_{\mathfrak{g}}(X,JY)).$$

Lo que nos induce a definir

$$B(X,Y) = K_{\mathfrak{g}}(X,Y) + K_{\mathfrak{g}}(X,JY),$$

la cual es $\mathbb{R}$-bilineal simétrica y, dado que J y $Ad(\sigma)$ conmutan, es $Ad(G^*)$-invariante. Pero B no es un múltiplo de la forma de Killing: Si lo fuera, entonces tendríamos que $K_{\mathfrak{g}}(X,JY) = cK_{\mathfrak{g}}(X,Y)$ para alguna constante $c \in \mathbb{R}$. Pero tomando JY en lugar de Y tenemos $K_{\mathfrak{g}}(X,Y) = -cK_{\mathfrak{g}}(X,JY) = -c^2K_{\mathfrak{g}}(X,Y)$ para cualesquiera $X,Y \in \mathfrak{g}$. Pero dado que $K_{\mathfrak{g}}$ es no degenerada, esto implica que $c^2+1=0$, lo cual es imposible. Sin embargo para el segundo caso tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.2 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie real (simple) cuya complexi–ficación es simple. Entonces las formas bilineales $Ad(G)$-invariantes en $\mathfrak{g}$ son múltiplos de la forma de Killing en $\mathfrak{g}$.*

Demostración: Sea $B_{\mathfrak{g}}$ la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, y consideremos B una forma bilineal $Ad(G)$-invariante en $\mathfrak{g}$.

Tenemos inducidas de manera natural formas bilineales en $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, las cuales son $Ad(G^*)$-invariantes (aquí G^* es el grupo adjunto asociado a $\mathfrak{g}$). También de manera natural se inducen mapeos lineales $\bar{B}_{\mathfrak{g}}$ y $\bar{B}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ en su dual $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^*$, que son $Ad(G^*)$-equivariantes. Sea $T = \bar{B}_{\mathfrak{g}}^{-1}\bar{B}$. Entonces es facil ver, de la $Ad(G)$-equivarianza, que $Ad(\sigma)$ y T conmutan para cualquier $\sigma \in G^*$.

Tenemos en la acción algebraica del grupo adjunto $\bar{G}^*$ asociado a $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$

$$\bar{G}^* \times \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$$

$$(\bar{\sigma}, U) \longmapsto Ad(\bar{\sigma})UAd(\bar{\sigma})^{-1}$$

que T es un punto G^*-fijo, y como G^* es Zariski-denso en $\bar{G}^*$ (por ser un conjunto de $\mathbb{R}$-puntos), T es un punto fijo para todo $\bar{\sigma} \in \bar{G}^*$. Así $Ad(\bar{\sigma})$ y T conmutan para todo $\bar{\sigma} \in \bar{G}^*$. Ahora, tomando $\sigma = \exp tX$, junto con la ecuación $Ad(\exp tX) = e^{ad(tX)}$ que viene del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{ad_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}} & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \\
{\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle e} \\
\bar{G}^* & \xrightarrow[Ad_{\bar{G}^*}]{} & GL(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}),
\end{array}$$

y derivando en $t = 1$ llegamos a que T y $ad(\sigma)$ conmutan. Dada la simplicidad de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, ad es una representación irreducible; y luego, el lema de Schur nos dice que T es un múltiplo de la identidad, es decir $T = \lambda I$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. De donde $\bar{B} = \lambda \bar{B}_{\mathfrak{g}}$ en $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, y regresando a las formas originales y dada la igualdad $B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}|_{\mathfrak{g}} = B_{\mathfrak{g}}$, se tiene que $B = \lambda B_{\mathfrak{g}}$. En particular $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

En el sentido de describir las geometrías biinvariantes de los grupos de Lie, observamos lo siguiente. Sea G un grupo de Lie semisimple y G^* el grupo adjunto de Lie(G). Toda estructura pseudo-Riemanniana en G^* se levanta a G via difeomorfismos locales. El recíproco en general es falso. Sin embargo si se tiene una estructura pseudo-Riemanniana biinvariante, entonces en particular es invariante bajo Z_G, el centro de G, y así se induce una estructura pseudo-Riemanniana biinvariante en $G^* = G/Z_G$. De aquí se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.1.3 *Un grupo de Lie simple G, con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ cuya complexificación $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ es simple, no admite más estructuras biinvariantes que las dadas por los múltiplos de la forma de Killing.*

En particular para un grupo de Lie simple y compacto se tiene la afirmación de la proposición. Sin embargo una prueba elemental para este caso usando solamente álgebra lineal puede darse como sigue.

Siendo G compacto, la forma de Killing asociada $B_{\mathfrak{g}}$ es definida negativa. Por lo que $-B_{\mathfrak{g}}$ da una métrica biinvariante en G (i.e. un producto interno en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$). También para $\sigma \in G$, se tiene que $Ad(\sigma) \in O(B_{\mathfrak{g}})$, el grupo ortogonal de $B_{\mathfrak{g}}$.

Sea B una forma bilineal simétrica $Ad(G)$-invariante, entonces por el teorema del eje principal [7] B se representa por una matriz diagonal (con elementos en $\mathbb{R}$), digamos B misma, respecto a una base $B_{\mathfrak{g}}$-ortonormal.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un eigenvalor de B y $\mathfrak{g}_\lambda$ el eigenespacio correspondiente. Entonces B conmuta con $ad(X)$ para cualquier $X \in \mathfrak{g}$, esto dice que $\mathfrak{g}_\lambda$ es un ideal en $\mathfrak{g}$. Y por la simplicidad de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}$.

Entonces se tiene:

$$B(X, X) = X^t B X = \lambda X^t X = \lambda \|X\|^2 = -\lambda B_{\mathfrak{g}}(X, X).$$

Y por polarización: $B(X,Y) = -\lambda B_{\mathfrak{g}}(X,Y)$.

4 Comentarios Finales

En esta última sección doy referencia a trabajos recientes dentro de los cuales, en casos particulares se ve la necesidad de encontrar todas las formas bilineales $Ad(G^*)$-invariantes.

Sean M una variedad suave conexa con métrica pseudo-Riemanniana $< \cdot, \cdot >$ de signatura (p,q), G un grupo de Lie conexo actuando suavemente y localmente fiel en M por isometrías. Denotemos por $Symm^2(\mathfrak{g})$ el espacio de formas bilineales simétricas en $\mathfrak{g}$. Se define un mapeo $\phi : M \to Symm^2(\mathfrak{g})$ de la siguiente manera: Para $X,Y \in \mathfrak{g}$, sean X^*, Y^* los campos inducidos en M por los subgrupos uniparamétricos $\{\exp(tX)\}$ y $\{\exp(tY)\}$, y hacemos $\phi(m)(X,Y) =< X^*_m, Y^*_m >_m$. Es conocido que ϕ es suave y equivariante respecto a la acción adjunta de G en $Symm^2(\mathfrak{g})$, lo cual dice que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \longrightarrow & M \\ {\scriptstyle id\times\phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \phi} \\ G \times Symm^2(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & Symm^2(\mathfrak{g}). \end{array}$$

La importancia de este mapeo está en sus aplicaciones. Por ejemplo Adams & Stuck [1] se ayudan de tal mapeo para clasificar los grupos de Lie conexos que pueden actuar isométricamente en una variedad de Lorentz compacta. Por otro lado, el mapeo ϕ es también utilizado por Nadine Kowalsky en [9], donde ella analiza el caso no compacto estableciendo otras condiciones.

Los resultados de Adams & Stuck completan la clasificación empezada por Zimmer [13], de los grupos de Lie conexos que pueden actuar isométricamente en una variedad de Lorentz compacta (de hecho prueban resultados sin usar la teoría ergódica, como lo hace Zimmer, y completan la clasificación). Mientras que Kowalsky pide condiciones más fuertes para el grupo y da libertad a la variedad de Lorentz (e.g. no se le piden condiciones de compacidad o volumen finito como lo hace Zimmer).

Sin embargo, Adams, Stuck y Kowalsky, para demostrar sus resultados ocupan herramienta sólo de teoría de álgebras de Lie. Ellos se basan en propiedades como el hecho de que no hay muchos subespacios isotrópicos de los productos internos inducidos por ϕ.

Cuando el mapeo ϕ es constante, da lugar a una forma bilineal simétrica $Ad(G^*)$-invariante. Teniendo los múltiplos de la forma de Killing tales propiedades, es natural preguntarnos si hay más. La res–puesta fué dada en la sección anterior para álgebras de Lie simples. Con herramientas de teoría ergódica y geometría algebraica pueden verse casos donde el mapeo ϕ es constante.

Agradecimientos

Agradezco del Dr. Raúl Quiroga Barranco el apoyo y la guía que he recibido en los últimos años, así como las multiples sugerencias y comentarios que han hecho posible el presente trabajo. También agradezco las sugerencias de los árbitros para una mejor presentación y un resultado más general en la sección 3.

Francisco Gabriel Hernández Zamora
Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN,
A.P. 14-740,
México, D.F. 07300
fgher@math.cinvestav.mx

Referencias

[1] S. Adams, G. Stuck. *The Isometry Group of a Compact Lorentz Manifold, I.* Invent. Math. **129**. (1997), 239-261.

[2] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symetric Spaces.* Academic Preess. (1978).

[3] R. Berlanga, L. Hernández, A. Sánchez. *Introducción a la Geometría de los Grupos de Lie.* Aportaciones Matemáticas de la IV Escuela de Verano de Geometría y Sistemas Dinámicos. **21**. (1998), 1-93.

[4] C. Chevalley. *Théorie des Groupes de Lie...*. Hermann. (1968).

[5] J. Eells Jr., J. H. Sampson. *Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds.* Am. J. Math. **86**. (1964), 109-160.

[6] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine. *Riemannian Geometry*. Second Edition. Springer Verlag. (1993).

[7] K. Hoffman, R. Kunze. *Álgebra Lineal*. Prentice-Hall Hispanoamericana. (1973).

[8] S. Kobayashi, K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry, (vol I)*. Interscience Publishers. (1963).

[9] N. Kowalsky. *Noncompact Simple Automorphism Groups of Lorentz Manifolds and other Geometric Manifolds*. Ann. of Math. **144**. (1997), 611-640.

[10] T. A. Springer. *Linear Algebraic Groups*. Birkhäuser. (1991).

[11] Z. Wan. *Lie Algebras*. Pergamon Press. (1975).

[12] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer-Verlag. (1983).

[13] R. J. Zimmer. *On the Automorphism Group of a Compact Manifold and other Geometric Manifolds*. Invent. Math. **83**. (1986), 411-424.

[14] R. J. Zimmer. *Ergodic Theory and Semi-simple Groups*. Birkhäuser. Boston. (1984).