

Algebra generada por la proyección de Bergman y operadores de multiplicación por funciones continuas a trozos *

Maribel Loaiza Leyva

Resumen

Sea $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ y \mathcal{L} una colección finita de curvas suaves en D . Se estudia el álgebra \mathcal{R} generada por la proyección de Bergman de D y los operadores de multiplicación por funciones continuas en $D \setminus \mathcal{L}$. Se considera el caso en que en un punto $z_0 \in \partial D$ convergen dos o más curvas de \mathcal{L} y se describe el álgebra de Calkin de \mathcal{R} .

2000 Mathematics Subject Classification: 47B34, 47L25, 44A15.

Keywords and phrases: proyección de Bergman, principio local, transformaciones integrales.

1 Introducción

Consideremos el disco unitario D con la medida de Lebesgue $d\mu(z) = dx dy$, $z = x + iy$. Denotemos por $L_2(D)$ al espacio de funciones medibles cuadrado integrables en D ; y por $A^2(D)$, al subespacio de $L_2(D)$ de funciones analíticas en D . La proyección ortogonal de $L_2(D)$ sobre $A^2(D)$ se llama la *proyección de Bergman* de D y se denota por B . En este trabajo se estudia el álgebra de Calkin del álgebra \mathcal{R} la cual está generada por todos los operadores de la forma

$$(1.1) \quad A = a(z)I + b(z)B + K,$$

*Este trabajo es parte de la tesis doctoral de la autora la cual fue realizada en el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV.

donde I es el operador identidad, K es un operador compacto y los coeficientes $a(z)$ y $b(z)$ son funciones continuas a trozos en D (el tipo de discontinuidades consideradas se describirá en la Sección 3).

Cuando los coeficientes para (1.1) son funciones continuas, el álgebra de Calkin de \mathcal{R} es conmutativa. Esta conmutatividad se pierde si consideramos coeficientes discontinuos. Vasilevski considera como familia de coeficientes en [18] funciones continuas en $D \setminus \mathcal{L}_1$ con límites unilaterales en cada punto de \mathcal{L}_1 , siendo \mathcal{L}_1 una colección finita de curvas suaves tales que converge a lo más una curva de \mathcal{L}_1 en un punto frontera de D . El álgebra de Calkin de \mathcal{R} se representa por secciones continuas de un haz C^* . Para el tipo de discontinuidades estudiadas en [18], la descripción de la fibra (álgebra local) en un punto frontera de discontinuidad está basada en la descripción del álgebra C^* generada por dos proyecciones ortogonales ([17]).

En este trabajo se considera una colección finita \mathcal{L} de curvas suaves en D . Dado un punto en $z_0 \in \partial D$ se permite que converja cualquier cantidad de curvas de \mathcal{L} en z_0 . El conjunto $PC(D, \mathcal{L})$ formado por todas las funciones continuas en $D \setminus \mathcal{L}$ que tienen límites unilaterales en cada punto de \mathcal{L} es tomado como familia de coeficientes para (1.1). La descripción del álgebra local en los puntos frontera donde convergen curvas de \mathcal{L} resulta de mucho interés y está relacionado de manera directa con un álgebra generada por dos o más proyecciones (dependiendo de cuántas curvas de \mathcal{L} converjan en el punto en cuestión).

2 Preliminares

Sea X un espacio de Banach. El conjunto de transformaciones lineales acotadas de X en X se denotará por $\mathcal{B}(X)$. Al subconjunto de $\mathcal{B}(X)$ formado por los operadores compactos lo vamos a denotar por $\mathcal{K}(X)$.

La cardinalidad de una base de X se llama la *dimensión de X* y se denota por $\dim X$. Si $\dim X < \infty$ decimos que X es finito dimensional. El siguiente lema es válido en un espacio de Banach X de cualquier dimensión.

Lema 2.1 ([8], pág. 34) *Sea X un espacio de Banach y sea $P(t)$ una proyección que depende continuamente en norma de un parámetro t el cual varía en una región (conexo) del eje real o del plano complejo. Entonces los rangos $P(t)X$ son isomorfos para todo t . En particular, $\dim P(t)X$ no depende de t .*

Sea \mathbb{T} la circunferencia unitaria. Como es usual, $L_2(\mathbb{T})$ denota el conjunto de funciones $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, medibles con respecto a la medida de longitud de arco, y de cuadrado integrable.

El conjunto $\left\{ \frac{t^n}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ es una base ortonormal para $L_2(\mathbb{T})$. Cualquier función $f \in L_2(\mathbb{T})$ es representada por la serie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, t^n \rangle t^n.$$

Sea $S_D : L_2(D) \rightarrow L_2(D)$ el operador integral singular bidimensional dado por

$$(2.1) \quad S_D(\phi)(z) = \frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\mu(\xi).$$

Los operadores S_D y S_D^* son de tipo local, esto es, conmutan con los operadores de multiplicación por funciones continuas módulo un operador compacto ([10]). La proyección de Bergman se representa por medio del operador (2.1) de la siguiente manera:

$$(2.2) \quad B = I - S_D S_D^*.$$

El siguiente teorema es inmediato de la ecuación (2.2).

Teorema 2.1 *Sea $a(z) \in C(\overline{D})$. Entonces el conmutador*

$$[B, a(z)I] = Ba(z)I - a(z)B$$

es compacto.

Teorema 2.2 ([18]) *Si $a(z) \in C(\overline{D})$ es tal que $a|_{\partial D} = 0$. Entonces los operadores $a(z)B$ y $Ba(z)I$ son compactos.*

2.1 El principio local de Douglas-Varela

El principio local de Douglas-Varela ([15]) permite representar un álgebra C^* como el álgebra de secciones continuas de un haz C^* . A continuación se dará un bosquejo de la construcción del principio local de Douglas-Varela ([2],[19]).

Sea \mathcal{A} un álgebra C^* y sea $J = \{J(t) | t \in T\}$ una familia de ideales bilaterales cerrados de \mathcal{A} tales que $\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}$. Para cada $t \in T$ definimos el *álgebra local* en el punto t como

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}/J(t).$$

Sea $\pi(t) : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}(t)$ la proyección canónica. Dos elementos a y b de \mathcal{A} se llaman *localmente equivalentes en t* si $\pi(t)(a) = \pi(t)(b)$. Sea

$$E = \bigsqcup_{t \in T} \mathcal{A}(t)$$

la unión ajena de las álgebras $\mathcal{A}(t)$. Definamos la proyección $p : E \rightarrow T$ por

$$p(a + J(t)) = t, \quad a \in \mathcal{A}.$$

Se introduce una topología en E y T de tal forma que el haz (p, E, T) obtenido sea un haz C^* . Para cada $a \in \mathcal{A}$ se define la sección $\tilde{a} : T \rightarrow E$

$$\tilde{a}(t) := \pi(t)(a).$$

Sea $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{a} | a \in \mathcal{A}\}$. La topología que se introduce en E es la que tiene como subbase a los conjuntos de la forma

$$U(\tilde{a}, \varepsilon) = \{x \in E | \|x - \tilde{a}(p(x))\| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Se considera la topología en T como la más fuerte tal que la proyección p sea continua. Denotemos por $\Gamma(\xi) = \Gamma(p, E, T)$ al álgebra de secciones continuas del haz (p, E, T) .

Sea \mathcal{Z} una subálgebra del centro de \mathcal{A} . Introduzcamos el conjunto $\mathcal{M}_{\mathcal{Z}}$ formado por los funcionales multiplicativos de \mathcal{Z} con la topología débil estrella heredada del espacio dual de \mathcal{Z} . El núcleo de cada funcional $\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{Z}}$ es un ideal bilateral maximal de \mathcal{Z} , al cual denotaremos por J_{ϕ} . El ideal bilateral cerrado de \mathcal{A} generado por J_{ϕ} es $J(\phi) := J_{\phi}\mathcal{A}$. La familia $\{J(\phi) | \phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{Z}}\}$ es tal que

$$\bigcap_{\phi \in \mathcal{M}_{\mathcal{Z}}} J(\phi) = \{0\}.$$

Teorema 2.3 ([4],[15]) *Sea \mathcal{A} un álgebra C^* con identidad y sea $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}$ una subálgebra C^* del centro con la misma identidad. Sea $\mathcal{M}_{\mathcal{Z}}$ el espacio de ideales maximales de \mathcal{Z} . Entonces tenemos el siguiente isomorfismo*

$$\mathcal{A} \cong \tilde{\mathcal{A}} \cong \Gamma(\xi),$$

donde $\xi = (p, E, \mathcal{M}_{\mathcal{Z}})$.

2.2 Álgebra generada por n proyecciones ortogonales

Consideremos un espacio de Hilbert \mathcal{H} con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Como es usual denotaremos por $M_n(\mathbb{C})$ al conjunto formado por las matrices $n \times n$ con valores complejos y por $D_n(\mathbb{C})$ al subconjunto de $M_n(\mathbb{C})$ constituido por las matrices diagonales. Consideremos dos proyecciones ortogonales P_1 y P_2 en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sea $\mathcal{R}(I, P_1, P_2)$ el álgebra C^* generada por P_1, P_2 y el operador identidad I .

Teorema 2.4 ([17]) *Sean P_1 y P_2 dos proyecciones ortogonales que cumplen las condiciones*

- i) Si $0 \in \Delta = \text{Sp}(P_1 - P_2)^2$ entonces $\pm 1 \in \text{Sp}(I - P_1 - P_2)$.*
- ii) Si $1 \in \Delta$ entonces $\pm 1 \in \text{Sp}(P_1 - P_2)$.*

Entonces el álgebra $\mathcal{R}(I, P_1, P_2)$ es isomorfa al álgebra \mathcal{N} formada por las funciones continuas $f : \Delta \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ tales que $f(\Delta \cap \{0, 1\}) \subset D_2(\mathbb{C})$. El isomorfismo ϕ está determinado por la siguiente aplicación de los generadores

$$\begin{aligned} \phi(P_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \Delta, \\ \phi(P_2) &= \begin{pmatrix} 1-t & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & t \end{pmatrix}, \quad t \in \Delta. \end{aligned}$$

Las condiciones *i)* e *ii)* se cumplen si 0 y 1 son puntos de acumulación de Δ . Si alguna de las dos condiciones *i)* o *ii)* no se cumple, el álgebra sufre una modificación. El punto en cuestión no induce dos representaciones irreducibles unidimensionales (en [14] se ha desarrollado en detalle este caso). Aquí presentaremos el caso especial en que no se satisface la condición *i)* y se satisface la condición *ii)* del teorema anterior. En lugar de *i)* tendremos la restricción

$$i)' \quad 0 \in \Delta \text{ y } -1 \notin \text{Sp}(I - P_1 - P_2).$$

Sea $\Delta_0 = \Delta \setminus \{0\}$ y \mathcal{U}_0 el álgebra formada por las funciones continuas $f : \Delta_0 \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ tales que $f(\Delta \cap \{1\}) \subset D_2(\mathbb{C})$.

Teorema 2.5 ([14]) *El álgebra $\mathcal{R}(I, P_1, P_2)$ es isomorfa a $\mathbb{C} \oplus \mathcal{U}_0$. El isomorfismo $\phi : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathcal{U}_0$ está determinado por la siguiente aplicación de los generadores de \mathcal{R} :*

$$\begin{aligned}\phi(P_1) &= \left(0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad t \in \Delta_0, \\ \phi(P_2) &= \left(0, \begin{pmatrix} 1-t & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & t \end{pmatrix}\right), \quad t \in \Delta_0.\end{aligned}$$

Sea $\ell_0 \in \mathcal{H}$ con norma 1. Denotemos por L_0 al subespacio de \mathcal{H} generado por ℓ_0 , y sea $P : \mathcal{H} \rightarrow L_0$ la proyección ortogonal sobre el espacio L_0 . La proyección P está dada por

$$P(\phi) = \langle \phi, \ell_0 \rangle \ell_0, \quad \phi \in \mathcal{H}.$$

Consideremos n proyecciones ortogonales P_1, \dots, P_n tales que

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad i, j = 1, \dots, n$$

y

$$P_1 + \dots + P_n = I.$$

Introduzcamos las imágenes $M_i = \text{Im}(P_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Teorema 2.6 ([13]) *Si $L_0^\perp \cap M_i = \{0\}$ para $i = 1, \dots, n$. Entonces el álgebra*

$$\mathcal{R}(P, P_1, \dots, P_n),$$

generada por P y por P_1, \dots, P_n , es isomorfa a $\mathbb{C}^n \oplus M_n(\mathbb{C})$. El isomorfismo está generado por la siguiente transformación de los generadores

$$\begin{aligned}P &\mapsto ((0, 0, \dots, 0), (\sqrt{\gamma_i \gamma_j})), \\ P_1 &\mapsto ((1, 0, \dots, 0), (\delta_{11})), \\ &\vdots \\ P_n &\mapsto ((0, 0, \dots, 1), (\delta_{nn})),\end{aligned}$$

donde $\gamma_i = \|P_i(\ell_0)\|^2$, $i = 1, \dots, n$, $(\sqrt{\gamma_i \gamma_j})$ representa la matriz cuya entrada ij es $\sqrt{\gamma_i \gamma_j}$ y; por último, (δ_{ii}) es la matriz cuya única entrada distinta de cero es la entrada ii y esta última toma el valor de 1.

2.3 El operador $E(\lambda)$ y sus propiedades

En esta sección se da un resumen de una técnica que permite estudiar cierta clase de operadores que actúan en $L_2(\mathbb{R}^2)$ por medio de una familia de operadores que actúan en $L_2(\mathbb{T})$.

La transformada de Mellin $M : L_2(\mathbb{R}_+, r dr) \rightarrow L_2(\mathbb{R}, d\lambda)$ está definida para funciones $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ del siguiente modo:

$$(2.3) \quad (Mv)(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}_+} r^{-i\lambda} v(r) dr.$$

La inversa $M^{-1} = M^*$ adquiere la forma

$$(M^{-1}u)(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} r^{i\lambda-1} u(\lambda) d\lambda, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Consideremos el operador $E(\lambda) : L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ definido en la base $\left\{ \frac{t^n}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ por

$$(2.4) \quad E(\lambda)t^n = (-i)^n 2^{i\lambda} \frac{\Gamma(\frac{n+i\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-i\lambda+1}{2})} t^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Cuando $\lambda = 0$, las singularidades del cociente son removibles debido a que son polos simples de la función Γ .

Corolario 2.2 ([9]) *Para $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(\lambda)$ es un operador unitario.*

Para $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{T})$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{i1, i2, \dots\}$, con $\text{Im}\lambda > 0$, $E(\lambda)\varphi$ admite la representación

$$(2.5) \quad (E(\lambda)\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \Gamma(1+i\lambda) e^{\frac{\pi}{2}(i-\lambda)} \int_{\mathbb{T}} (-t \cdot \omega + i0)^{-i\lambda-1} \varphi(\omega) d\omega,$$

donde $t \cdot \omega = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$, $t = (t_1, t_2)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$,

$$(x \pm i0)^\mu = x_+^\mu + e^{i\pi\mu} x_-^\mu,$$

$$x_+^\mu = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{\mu \ln x} & x > 0, \end{cases}$$

$$x_-^\mu = (-x)_+^\mu, \quad \mu \neq -1, -2, \dots,$$

$$(x \pm i0)^k = x^k \pm (-1)^k \frac{i\pi}{(-k-1)!} \delta^{(-k-1)}(x), \quad k = -1, -2, \dots$$

y $\delta(x)$ es la distribución δ de Dirac. Para $\text{Im}\lambda \leq 0$ la integral (2.5) debe ser entendida en el sentido de continuación analítica, dado que la función $\lambda \mapsto (E(\lambda)\varphi)(t), t \in \mathbb{T}, \varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{T})$, admite continuación analítica (ver [12]) en el plano complejo, excepto por los polos $\lambda = ik, k = 1, 2, \dots$ de la función $\Gamma(1 + i\lambda)$.

La transformada inversa de $E(\lambda)$ está dada por

$$(E(\lambda)^{-1}\varphi)(t) = (E(-\lambda)\varphi)(-t), \quad \lambda \neq -ik, \quad k = 1, 2, \dots$$

y la forma en que actúa $E(\lambda)^{-1}$ sobre los elementos de la base de $L_2(\mathbb{T})$ es como sigue

$$E(\lambda)^{-1}t^n = (-i)^n(-1)^n 2^{-i\lambda} \frac{\Gamma(\frac{n-i\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+i\lambda+1}{2})} t^n.$$

En vista del Corolario 2.2, de ahora en adelante consideraremos sólo el caso $\lambda \in \mathbb{R}$.

La transformada de Fourier F en $L_2(\mathbb{R}^2)$ está dada para funciones $u \in L_1(\mathbb{R}^2) \cap L_2(\mathbb{R}^2)$ por:

$$(Fu)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx.$$

Consideremos el operador de reflexión $V : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ que actúa como:

$$(Vf)(\lambda) = f(-\lambda).$$

En coordenadas polares, $L_2(\mathbb{R}^2)$ se descompone como

$$L_2(\mathbb{R}^2) = L_2(\mathbb{R}_+, r dr) \otimes L_2(\mathbb{T}, d\omega).$$

Proposición 2.1 ([9],[12]) *La transformada de Fourier admite la siguiente descomposición*

$$F = (M^{-1} \otimes I)(V \otimes I)(I \otimes E(\lambda))(M \otimes I),$$

donde M es la transformada de Mellin dada por (2.3).

2.4 El álgebra $\Psi(PC(\dot{\mathbb{R}}^2, \mathcal{I}), H(C(\mathbb{T})))$

Sea $H(C(\mathbb{T}))$, el conjunto de todas las funciones homogéneas de orden cero en \mathbb{R}^2 con restricciones a \mathbb{T} continuas.

Por $\dot{\mathbb{R}}^2$ denotaremos a la compactificación unipuntual de \mathbb{R}^2 . Sea $\mathcal{I} = \cup_{p=1}^k I_p$ la unión de los segmentos

$$I_p = \{x \in \mathbb{R}^2 : \arg x = \alpha_p, 0 < |x| < r_p\}$$

que parten del origen.

Denotemos por t_1, \dots, t_k a los puntos de intersección de \mathbb{T} con los rayos que contienen a los segmentos I_p y sea $\Lambda = \{t_1, \dots, t_k\}$. Consideremos el conjunto $PC(\mathbb{T}, \Lambda)$ formado por todas las funciones continuas en $\mathbb{T} \setminus \Lambda$ con límites unilaterales en los puntos de Λ .

Introduzcamos el conjunto $PC(\dot{\mathbb{R}}^2, \mathcal{I})$ constituido por las funciones $a(x)$ tales que:

1. Son continuas en $\dot{\mathbb{R}}^2 \setminus \mathcal{I}$.
2. Tienen límites unilaterales en los puntos de I_p , $p = 1, \dots, k$.
3. Existe una función homogénea $h_a(x)$ de orden cero tal que la diferencia $a(x) - h_a(x)$ tiene límite cero en el origen.

Consideremos el álgebra $\Psi(PC(\dot{\mathbb{R}}^2, \mathcal{I}), H(C(\mathbb{T})))$ generada por los operadores de la forma

$$a(x)I, \quad a(x) \in PC(\dot{\mathbb{R}}^2, \mathcal{I})$$

y

$$F^{-1}b(\xi)F, \quad b \in H(C(\mathbb{T}))$$

que actúan en $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, introducimos el álgebra \mathfrak{S}_λ generada por los siguientes operadores que actúan en $L_2(\mathbb{T})$:

$$a(t)I, \quad b_\lambda(\Omega) = E(\lambda)^{-1}b(t)E(\lambda)$$

con $a(t) \in PC(\mathbb{T}, \Lambda)$ y $b(t) \in C(\mathbb{T})$.

El operador integral singular S definido por

$$(S\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\varphi(\omega)}{\omega - z} d\omega, \quad \varphi \in L_2(\mathbb{T}),$$

es unitario autoadjunto por lo que induce las proyecciones ortogonales de Szëgo P_+ y P_- dadas por

$$P_+ = \frac{1}{2}(I + S), \quad P_- = \frac{1}{2}(I - S).$$

El método usado en [9] para obtener la descripción del álgebra

$$\Psi(H(PC(\mathbb{R}^2, \mathcal{I}), H(C(\mathbb{T})))$$

está basado en el principio local de Douglas-Varela. En este trabajo sólo necesitaremos la descripción del álgebra local en el punto cero.

Sea \mathfrak{S} el álgebra C^* de todas las funciones continuas y acotadas $U : \mathbb{R} \rightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathfrak{S}_\lambda$ tales que $U(\lambda) \in \mathfrak{S}_\lambda$ con la norma

$$\|U\| = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|U(\lambda)\|.$$

Teorema 2.7 ([9]) *El álgebra local de $\Psi(H(PC(\mathbb{R}^2, \mathcal{I}), H(C(\mathbb{T})))$ en el punto cero es isomorfa a una subálgebra de \mathfrak{S} . El isomorfismo encaje está generado por la siguiente aplicación de los generadores:*

$$\begin{aligned} a(x)I &\mapsto h_a(t)I, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ F^{-1}b(\omega)F &\mapsto b(it)P_+ + b(-it)P_- + K(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde $K(\lambda) = E(\lambda)^{-1}b(t)E(\lambda) - b(it)P_+ - b(-it)P_-$ es un operador compacto, $a(x) \in H(PC(\mathbb{T}, \Lambda))$ y $b(\omega) \in H(C(\mathbb{T}))$.

3 El álgebra \mathcal{R}

De ahora en adelante \mathcal{L} denotará una unión finita de curvas suaves en D . Supondremos que para cada punto $z \in \partial D$ donde convergen dos o más curvas de \mathcal{L} , existe una vecindad V_z de z tal que la parte de \mathcal{L} contenida en V_z puede ser transformada, mediante una transformación de Möbius, en segmentos radiales que parten del origen hacia el semiplano superior. Aunado a esto supondremos que para cada punto $z \in D \cap \mathcal{L}$ existe una bola $V(z, r_z)$ centrada en z de tal forma que si z pertenece a s curvas de \mathcal{L} , estas curvas dividen a $V(z, r_z)$ en s partes. Esta última condición es satisfecha, por ejemplo, si \mathcal{L} consiste de un número finito de arcos suaves que unen puntos de ∂D y que sólo se intersectan a pares en sus puntos extremos.

Denotemos por $PC(D, \mathcal{L})$ al conjunto compuesto por las funciones continuas en $D \setminus \mathcal{L}$ que tienen límites unilaterales en cada uno de los puntos de \mathcal{L} .

Estamos interesados en estudiar el álgebra \mathcal{R} generada por los operadores de la forma

$$A = a(z)I + b(z)B + K,$$

donde K es un operador compacto, $a(z)$ y $b(z)$ pertenecen a $PC(D, \mathcal{L})$. Para describir el álgebra de Calkin $\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/\mathcal{K}(L_2(D))$ se utilizará el principio local de Douglas-Varela.

Sea $\pi : \mathcal{R} \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}$ la proyección canónica. La imagen $\pi(A)$, $A \in \mathcal{R}$ será denotada por \widehat{A} . Es fácil ver que \widehat{B} es una proyección que no es la proyección cero ni la proyección identidad.

La proyección

$$\pi|_{C(\overline{D})} : C(\overline{D})I \rightarrow \pi(C(\overline{D}))$$

es un isomorfismo isométrico por lo que $\pi(C(\overline{D})I)$ es isomorfa a $C(\overline{D})I$. Los elementos de \mathcal{R} son de tipo local, por ello, $\pi(C(\overline{D})I)$ es una subálgebra del centro de \mathcal{R} . El espacio de ideales maximales de $\pi(C(\overline{D})I)$ es isomorfo a \overline{D} .

Para cada punto $z \in \overline{D}$, el álgebra local de $\widehat{\mathcal{R}}$ en el punto z se denotará por $\widehat{\mathcal{R}}(z)$; y por $\pi(z)$, la proyección canónica de $\widehat{\mathcal{R}}$ sobre $\widehat{\mathcal{R}}(z)$. Introduzcamos el homomorfismo π_z que identifica los elementos de \mathcal{R} localmente equivalentes en el punto z , es decir, $\pi_z = \pi(z) \circ \pi$.

Cada generador del álgebra \mathcal{R} es de la forma

$$A = a_1(z)I + b_1(z)B + K,$$

donde $a_1(z), b_1(z) \in PC(D, \mathcal{L})$ y K es un operador compacto. El operador A puede ser reescrito como

$$(3.6) \quad A = a(z)B + b(z)(I - B) + K$$

donde $a(z) = a_1(z) + b_1(z)$ y $b(z) = a_1(z)$.

3.1 Álgebra local en un punto de D

Para los puntos de D tenemos dos tipos diferentes de álgebras locales, los cuales corresponden a los puntos de continuidad y a los puntos de discontinuidad.

Teorema 3.1 *Si $z_0 \in D \setminus \mathcal{L}$, el álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ es isomorfa a \mathbb{C} .*

Demostración: Si $c_1(z)$ y $c_2(z)$ están en $PC(D, \mathcal{L})$, entonces $c_1(z)I$ es localmente equivalente a $c_2(z)I$ en el punto z_0 si y sólo si $c_1(z_0) = c_2(z_0)$.

Sean $V_1 \subset V_2 \subset D$ vecindades de z_0 y sea $f \in C(\overline{D})$ tal que $f|_{V_1} = 1$ y $f|_{D \setminus V_2} = 0$. Como fB es compacto (Teorema 2.2), fB es localmente equivalente al operador cero. Por otro lado fI es localmente equivalente

a $1I$ en el punto z_0 . De esta forma B es localmente equivalente a cero en el punto z_0 . El isomorfismo $\Phi_{z_0} : \widehat{\mathcal{R}}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ está dado por

$$\Phi_{z_0} \left(\pi_{z_0} (a(z)B + b(z)(I - B) + K) \right) = b(z_0). \quad \square$$

Teorema 3.2 *Sea $z_0 \in D \cap \mathcal{L}$. Supongamos que z_0 es punto de convergencia de s curvas de \mathcal{L} . El álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ es isomorfa a \mathbb{C}^s .*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que \mathcal{L} está formada por s curvas que unen el punto z_0 con un punto de la frontera de D y que no se intersectan a pares en un punto distinto de z_0 . Sean $R_i \subset D, i = 1, \dots, s$ las regiones en que las curvas de \mathcal{L} dividen a D . Para $c(z) \in PC(D, \mathcal{L})$ consideremos

$$c_i = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in R_i}} c(z),$$

entonces $c(z)I$ es localmente equivalente a $\sum_{i=1}^s c_i P_i$ en z_0 , donde $P_i = \chi_{R_i} I, i = 1, \dots, s$. Las funciones χ_{R_i} cumplen casi dondequiera

$$\sum_{i=1}^s \chi_{R_i} = 1 \text{ y } \chi_{R_i} \chi_{R_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Esto implica que $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ es generada por s proyecciones ortogonales que suman I . Tenemos el isomorfismo $\Phi_{z_0} : \widehat{\mathcal{R}}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}^s$ dado por

$$\Phi_{z_0} \left(\pi_{z_0} (a(z)B + b(z)(I - B) + K) \right) = (b_1, b_2, \dots, b_s). \quad \square$$

3.2 Álgebra local en los puntos de ∂D donde converge a lo más una curva

Los puntos de la frontera de D pueden ser clasificados en tres categorías: puntos de continuidad, puntos de discontinuidad donde converge una curva de \mathcal{L} , y puntos de discontinuidad donde convergen más de una curva de \mathcal{L} . En esta sección nos dedicaremos a describir las álgebras locales en los puntos de las primeras dos categorías.

Teorema 3.3 *Sea $z_0 \in \partial D$ un punto de continuidad. El álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ es isomorfa a \mathbb{C}^2 . El isomorfismo $\Phi_{z_0} : \widehat{\mathcal{R}}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}^2$ está dado en los generadores de \mathcal{R} por*

$$\Phi_{z_0} \left(\pi_{z_0} (a(z)B + b(z)(I - B) + K) \right) = (b(z_0), a(z_0)).$$

Demostración: En este caso B es localmente equivalente a sí mismo en el punto z_0 y si $c(z) \in PC(D, \mathcal{L})$, $c(z)I$ es localmente equivalente a $c(z_0)I$. Con esto tenemos el isomorfismo $\Phi_{z_0} : \widehat{\mathcal{R}}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}^2$ dado por

$$\Phi_{z_0} \left(\pi_{z_0} (a(z)B + b(z)(I - B) + K) \right) = (b(z_0), a(z_0)),$$

donde K es un operador compacto. \square

Sea \mathcal{J} el álgebra de todas las funciones continuas $g : [0, 1] \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ que satisfacen la condición $g(\{0, 1\}) \subset D_2(\mathbb{C})$.

Teorema 3.4 *Sea $z_0 \in \partial D$ un punto de discontinuidad donde converge una curva de \mathcal{L} . El álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ es isomorfa al álgebra \mathcal{J} .*

Demostración: Haciendo una construcción similar a la del Teorema 3.2 podemos considerar que la curva no se interseca a sí misma y que divide a D en dos regiones R_1 y R_2 . Sea χ_{R_i} la función característica de la región R_i , $i = 1, 2$. Para $c(z) \in PC(D, \mathcal{L})$ sea

$$c_i = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in R_i}} c(z).$$

Sea $P_i = \chi_{R_i}I$, $i = 1, 2$. El álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ es isomorfa al álgebra generada por $\pi_{z_0}(B)$ y $\pi_{z_0}(P_1)$. Tenemos que $\text{Sp}(\pi_{z_0}(B) - \pi_{z_0}(P_1))^2 = [0, 1]$ ([18]).

El isomorfismo

$$\Phi_{z_0} : \widehat{\mathcal{R}}(z_0) \rightarrow \mathcal{J}$$

transforma los generadores $A = a(z)B + b(z)(I - B) + K$ del álgebra \mathcal{R} en la siguiente forma

$$\Phi_{z_0}(\pi_{z_0}(A)) = \begin{pmatrix} a_1(1-t) + b_1t & c_1\sqrt{t(1-t)} \\ c_2\sqrt{t(1-t)} & a_2t + b_2(1-t) \end{pmatrix}$$

donde $t \in [0, 1]$ y $c(z) = a(z) - b(z)$. \square

3.3 Álgebra local en los puntos de ∂D donde convergen más de una curva de \mathcal{L}

Sea $z_0 \in \partial D$ un punto donde convergen $m - 1$ curvas de \mathcal{L} . El álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ es isomorfa e isométrica al álgebra generada por B y m proyecciones ortogonales P_1, \dots, P_m tales que

$$P_1 + \dots + P_m = I.$$

Teorema 3.5 *El álgebra $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ está generada por m proyecciones ortogonales.*

Demostración: Como en el caso anterior podemos suponer que las curvas no se intersectan entre sí y; por lo tanto, que dividen a D en m regiones. Llamemos R_1, R_2, \dots, R_m a tales regiones. Similarmente a los casos anteriores tenemos que si $c(z) \in PC(D, \mathcal{L})$,

$$(3.7) \quad c_i = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in R_i}} c(z)$$

y $P_i = \chi_{R_i} I$ entonces $c(z)I$ es localmente equivalente a $\sum_{i=1}^m c_i P_i$ en el punto z_0 y B es localmente equivalente a sí mismo. Así $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ es isomorfa al álgebra $\mathcal{R}(B, P_1, \dots, P_m)$ la cual está generada por B y por las proyecciones ortogonales P_i , $i = 1, \dots, m - 1$. \square

Para estudiar el álgebra local en el punto z_0 utilizaremos una transformación del disco unitario al semiplano superior, al cual denotaremos de ahora en adelante por \mathbb{R}_+^2 , de modo que el punto z_0 sea transformado en el origen y cada operador en $L_2(D)$ se transforme unitariamente en un operador en $L_2(\mathbb{R}_+^2)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z_0 = -1$. Con el fin de describir el álgebra local en estos puntos consideremos la transformación $L : D \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ definida por

$$(3.8) \quad L(z) = i \frac{z + 1}{1 - z}$$

y el operador unitario $U : L_2(\mathbb{R}_+^2) \rightarrow L_2(D)$ inducido por L y dado por

$$(3.9) \quad U(\varphi)(z) = \frac{2i}{(1 - z)^2} \varphi(L(z)).$$

El inverso del operador U tiene la forma

$$(3.10) \quad (U^{-1}\varphi)(\omega) = \frac{2i}{(\omega+i)^2} \varphi(L^{-1}(\omega)).$$

Sean $\ell_1, \dots, \ell_{m-1}$, las curvas de \mathcal{L} que convergen en el punto $z_0 \in \partial(D)$ (ordenadas en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj) y sean $L_i = L(\ell_i)$, $i = 1, \dots, m-1$. Es fácil verificar que $\sum_{i=1}^m c_i P_i$ es unitariamente equivalente a $\sum_{i=1}^m c_i P'_i$ donde $P'_i = \chi_{R'_i} I$ y $R'_i = L(R_i)$. En vista de lo anterior $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ es isomorfa al álgebra generada por los operadores P'_i , $i = 1, \dots, m$ y $U^{-1}BU$.

Proposición 3.1 *El operador S_D es unitariamente equivalente al operador $-S_{\mathbb{R}_+^2} W$, donde*

$$(W\varphi)(\omega) = \left(\frac{\omega+i}{\bar{\omega}-i} \right)^2 \varphi(\omega) \quad y \quad (S_{\mathbb{R}_+^2} f)(w) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\varphi(\xi)}{(\xi-w)^2} d\xi,$$

para $\omega \in \mathbb{R}_+^2$.

Demostración: Tomemos una bola B_ε de radio $\varepsilon > 0$ centrada en $\xi = L^{-1}(\omega)$. Entonces

$$(U^{-1}S_D U\varphi)(\omega) = \frac{2i}{(\omega+i)^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-1}{\pi} \int_{D \setminus B_\varepsilon} \frac{2i\varphi(L(\xi))}{(\xi - L^{-1}(\omega))^2 (-\xi + 1)^2} d\xi.$$

Con el cambio de variable $\tau = L(\xi)$ obtenemos

$$\begin{aligned} (U^{-1}S_D U\varphi)(\omega) &= \frac{-2i}{(\omega+i)} \frac{1}{\pi} \times \\ &\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus B'_\varepsilon} \frac{2i\varphi(\tau) |\det J_L^{-1}(\tau)|}{(L^{-1}(\tau) - L^{-1}(\omega))^2 (-L^{-1}(\tau) + 1)^2} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\frac{\tau+i}{\bar{\tau}-i} \right)^2 \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-\omega)^2} d\tau = -S_{\mathbb{R}_+^2} W(\varphi)(\omega). \end{aligned}$$

Aquí $B'_\varepsilon = L(B_\varepsilon)$ y $\det J_L^{-1}(\tau)$ es el determinante de la matriz jacobiana de L^{-1} en el punto τ . \square

La proyección de Bergman del semiplano superior, la cual vamos a denotar por $B_{\mathbb{R}_+^2}$, se representa en términos del operador $S_{\mathbb{R}_+^2}$ de la siguiente manera:

$$(3.11) \quad B_{\mathbb{R}_+^2} = I_{\mathbb{R}_+^2} - S_{\mathbb{R}_+^2} S_{\mathbb{R}_+^2}^*,$$

donde $I_{\mathbb{R}_+^2}$ es el operador identidad en $L_2(\mathbb{R}_+^2)$.

Corolario 3.1 *La proyección de Bergman de D es unitariamente equivalente a la proyección de Bergman de $L_2(\mathbb{R}_+^2)$.*

Demostración: Es inmediata de (3.11). \square

Sea $\theta_m = \pi$ y θ_i el ángulo entre el eje real y el segmento L_i para $i = 1, \dots, m-1$. Es claro que $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = \pi$. Sean Q_1, \dots, Q_m las proyecciones en $L_2(\mathbb{T})$ definidas por

$$(3.12) \quad Q_i f(t) = \chi_i f(t), \quad t \in \mathbb{T},$$

donde χ_i es la función característica del arco delimitado por los ángulos θ_{i-1} y θ_i , $i = 1, \dots, m$.

Proposición 3.2 *El operador $P_i^!$ es unitariamente equivalente a $I \otimes Q_i$ $i = 1, \dots, m$.*

Demostración: Basta aplicar el Teorema 2.7. \square

Teorema 3.6 *El operador $S_{\mathbb{R}^2}$ es unitariamente equivalente a $I \otimes S_1(\lambda)$ donde*

$$S_1(\lambda) = -t^{-2}I + K_1(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

y $K_1(\lambda) = E(\lambda)^{-1}\omega^{-2}E(\lambda) + t^{-2}I$ es un operador compacto.

Demostración: El operador $S_{\mathbb{R}^2}$ tiene la siguiente representación

$$S_{\mathbb{R}^2} = F^{-1}(\bar{z}/z)F$$

donde F es la transformada de Fourier en $L_2(\mathbb{R}^2)$. Aplicando el Teorema 2.7 se sigue el resultado. \square

El operador $K_1(\lambda)t^2$ tiene a los elementos de la base $\left\{ \frac{t^n}{\sqrt{2\pi}} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ como funciones propias.

Proposición 3.3 Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$K_1(\lambda)t^n = \frac{-2i\lambda}{n - i\lambda - 1}t^{n-2}, \quad n \neq 1 \quad \text{y} \quad K_1(\lambda)t = 2t^{-1}.$$

Demostración: Supongamos que $n \neq -1$. Entonces

$$\begin{aligned} K_1(\lambda)t^n &= (E(\lambda)^{-1}\omega^{-2}E(\lambda) + t^{-2}I)t^n \\ &= (-i)^{2n-2} \frac{\Gamma(\frac{n+i\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-i\lambda+1}{2})} (-1)^{n-2} \frac{\Gamma(\frac{n-i\lambda-1}{2})}{\Gamma(\frac{n+i\lambda-1}{2})} t^{n-2} + t^{n-2} \\ &= -\frac{\Gamma(\frac{n+i\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{n-i\lambda+1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{n-i\lambda-1}{2})}{\Gamma(\frac{n+i\lambda-1}{2})} t^{n+2} + t^{n+2}. \end{aligned}$$

De la propiedad $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ se sigue que

$$K_1(\lambda)t^n = \frac{-2i\lambda}{n - i\lambda - 1}t^{n-2}.$$

Para $n = -1$ puede realizarse el mismo procedimiento. \square

Sea $\mathbb{T}_+ = \{z = x + iy \mid |z| = 1, y > 0\}$ y sea $\chi_{\mathbb{T}_+}$ su función característica.

Proposición 3.4 $B_{\mathbb{R}_+^2}$ es unitariamente equivalente al operador $I \otimes B(\lambda)$, donde $B(\lambda) : L_2(\mathbb{T}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{T}_+)$ está dado por

$$B(\lambda) = \chi_{\mathbb{T}_+}(t^{-2}IK_1^*(\lambda) + K_1(\lambda)t^2I - K_1(\lambda)\chi_{\mathbb{T}_+}K_1^*(\lambda))\chi_{\mathbb{T}_+}$$

para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración: Usando los teoremas 2.7, 3.6 y el Corolario 3.1 se obtiene

$$\begin{aligned} B(\lambda) &= \chi_{\mathbb{T}_+} - \chi_{\mathbb{T}_+}(-t^{-2}I + K_1(\lambda))\chi_{\mathbb{T}_+}(-t^2I + K_1^*(\lambda))\chi_{\mathbb{T}_+} \\ &= \chi_{\mathbb{T}_+}(t^{-2}IK_1^*(\lambda) + K_1(\lambda)t^2I - K_1(\lambda)\chi_{\mathbb{T}_+}K_1^*(\lambda))\chi_{\mathbb{T}_+}. \quad \square \end{aligned}$$

Como $B_{\mathbb{R}_+^2}$ es una proyección ortogonal, $B(\lambda)$ es una proyección ortogonal. Por otro lado, $K_1(\lambda)$ es un operador compacto lo cual implica que $B(\lambda)$ es un operador compacto. Así $B(\lambda)$ es una proyección compacta, y como consecuencia tenemos que su imagen es finito dimensional.

Proposición 3.5 La familia $\{B(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ depende continuamente en norma del parámetro λ .

Demostración: Basta probar que la familia $\{K_1(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ depende continuamente en norma del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. Para probar esto último es suficiente demostrar que la familia $\{K_1(\lambda)t^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ depende en la norma continuamente del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$. La Proposición 3.3 implica que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ el operador $K_1(\lambda)t^2$ es diagonalizable, por lo que su norma coincide con el máximo de sus valores propios. Así la continuidad para $\lambda \neq 0$ se sigue de:

$$\begin{aligned} \|K_1(\lambda) - K_1(\lambda')\| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|(K_1(\lambda) - K_1(\lambda'))t^{n+2}\| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{-2i\lambda}{n - i\lambda - 1} - \frac{-2i\lambda'}{n - i\lambda' - 1} \right| \\ &= 2 \sup_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\lambda}{n - i\lambda - 1} - \frac{\lambda'}{n - i\lambda' - 1} \right| \\ &\leq 2|\lambda - \lambda'|. \end{aligned}$$

La continuidad para $\lambda = 0$ es consecuencia de:

$$\begin{aligned} \|K_1(\lambda') - K_1(0)\| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|(K_1(\lambda') - K_1(0))t^{n+2}\| \\ &= \sup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}} \left| \frac{-2i\lambda'}{n - i\lambda' - 1} \right| \\ &= 2|\lambda'|. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 3.2 $\dim(\text{Im}(B(\lambda)))$ es constante para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración: Basta usar el Lema 2.1 y la proposición anterior. \square

Proposición 3.6 $B(0)$ es la proyección ortogonal unidimensional de $L_2(\mathbb{T}_+)$ sobre el subespacio generado por $\frac{\chi_{\mathbb{T}_+} t^{-1}}{\sqrt{\pi}}$.

Demostración: Por la Proposición 3.4 sabemos que

$$B(0) = \chi_{\mathbb{T}_+} (t^{-2}K_2(0) + K_1(0)t^2I - K_1(0)\chi_{\mathbb{T}_+} K_2(0))\chi_{\mathbb{T}_+}.$$

Sea

$$\chi_{\mathbb{T}_+} t^m = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \chi_{\mathbb{T}_+} t^m, t^n \rangle t^n$$

la expansión en serie de Fourier de $\chi_{\mathbb{T}_+} t^m$. Tenemos

$$\begin{aligned}
 B(0)t^m &= B(0) \left(\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \chi_{\mathbb{T}_+} t^m, t^n \rangle t^n \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \chi_{\mathbb{T}_+} \left(4 \langle \chi_{\mathbb{T}_+} t^m, t^{-1} \rangle t^{-1} - 2 \langle \chi_{\mathbb{T}_+} t^m, t^{-1} \rangle K_1(0) \chi_{\mathbb{T}_+} t \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(4 \langle \chi_{\mathbb{T}_+} t^m, t^{-1} \rangle \chi_{\mathbb{T}_+} t^{-1} - 2 \langle \chi_{\mathbb{T}_+} t^m, t^{-1} \rangle \chi_{\mathbb{T}_+} t^{-1} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \langle \chi_{\mathbb{T}_+} t^m, t^{-1} \rangle \chi_{\mathbb{T}_+} t^{-1}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Corolario 3.3 $B(\lambda)$ es una proyección unidimensional para toda $\lambda \in \mathbb{R}$.

Denotamos por $\mathcal{R}(\lambda)$ al álgebra generada por el operador $B(\lambda)$, las proyecciones Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1} y $Q_m = I - Q_1 - \dots - Q_{m-1}$.

Llamemos g_λ al generador de norma 1 de $\text{Im } B(\lambda)$ y sea

$$\Delta_n = \{(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n, s_1 + s_2 + \dots + s_n = 1\},$$

el simplejo $(n-1)$ -dimensional.

Teorema 3.7 Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, el álgebra $\mathcal{R}(\lambda)$ es isomorfa a $\mathbb{C}^m \oplus M_m(\mathbb{C})$. La identificación está dada por la siguiente transformación de los generadores

$$\begin{aligned}
 B(\lambda) &\rightarrow ((0, \dots, 0), (\sqrt{t_i t_j})), \\
 Q_1 &\rightarrow ((1, 0, \dots, 0), (\delta_{11})), \\
 &\vdots \\
 Q_m &\rightarrow ((0, 0, \dots, 1), (\delta_{mm})),
 \end{aligned}$$

donde $t_i = \|Q_i(g_\lambda)\|^2$, $(\sqrt{t_i t_j})$ es la matriz cuya entrada ij es $\sqrt{t_i t_j}$ y (δ_{ii}) es la matriz cuya única entrada no cero es la entrada ii , siendo esta entrada igual a 1.

El Teorema 3.7 nos indica la importancia de conocer el generador de $\text{Im } B(\lambda)$; con este propósito se considerará de nuevo el espacio $A^2(D)$ y la forma en que este es transformado en $A^2(\mathbb{R}_+^2)$ (el espacio de funciones analíticas de cuadrado integrable en el semiplano superior). Una base

ortogonal para $A^2(D)$ es el conjunto $\{z^n \mid n \geq 0\}$. El operador unitario $U^{-1} : L_2(D) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+^2)$, definido en (3.10), transforma el espacio $A^2(D)$ en $A^2(\mathbb{R}_+^2)$ por lo que $\{U^{-1}(z^n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ es una base para $A^2(\mathbb{R}_+^2)$.

Proposición 3.7 Para cada $n \geq 0$, $U^{-1}(z^n) = h_n(z)$ donde

$$h_n(z) = 2i \frac{(z-i)^n}{(z+i)^{2+n}}$$

Demostración: Basta aplicar la definición de U^{-1} . \square

Cuando se transforma de manera unitaria la proyección de Bergman $B_{\mathbb{R}_+^2}$ en $I \otimes B(\lambda)$ el espacio de Bergman $A^2(\mathbb{R}_+^2)$ se transforma en la imagen de $I \otimes B(\lambda)$. Para obtener la imagen de $B(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, vamos a encontrar $(M \otimes I)(A^2(\mathbb{R}_+^2))$. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ entonces $(M \otimes I)f$ puede ser representado como:

$$(M \otimes I)f = I \otimes f_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

donde $f_\lambda \in L_2(\mathbb{T})$.

Como el operador $M \otimes I$ es unitario la proyección de Bergman del semiplano superior es unitariamente equivalente al operador $(M \otimes I)\chi_{\mathbb{R}_+^2} B_{\mathbb{R}_+^2} \chi_{\mathbb{R}_+^2} (M^{-1} \otimes I) = I \otimes B(\lambda)$.

Teorema 3.8 Sea $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ tal que $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+^2} \equiv 0$ y $f|_{\mathbb{R}_+^2} \in A^2(\mathbb{R}_+^2)$. Si $f_\lambda \in L_2(\mathbb{T})$ es tal que

$$(M \otimes I)f = I \otimes f_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

entonces $B(\lambda)f_\lambda = f_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración: Tenemos que $(M \otimes I)\chi_{\mathbb{R}_+^2} B_{\mathbb{R}_+^2} \chi_{\mathbb{R}_+^2} (M^{-1} \otimes I) = I \otimes B(\lambda)$. Esto implica que

$$\begin{aligned} (I \otimes B(\lambda))(I \otimes f_\lambda) &= (M \otimes I)\chi_{\mathbb{R}_+^2} B_{\mathbb{R}_+^2} \chi_{\mathbb{R}_+^2} (M^{-1} \otimes I)(I \otimes f_\lambda) \\ &= (M \otimes I)\chi_{\mathbb{R}_+^2} B_{\mathbb{R}_+^2} \chi_{\mathbb{R}_+^2} f \\ &= (M \otimes I)f \\ &= I \otimes f_\lambda. \quad \square \end{aligned}$$

El Teorema 3.8 nos permitirá encontrar el generador de la imagen de $B(\lambda)$ mediante la aplicación de $M \otimes I$ a cualquier función de $L_2(\mathbb{R}^2)$ cuya restricción a \mathbb{R}_+^2 pertenezca a $A^2(\mathbb{R}_+^2)$.

Proposición 3.8 Para $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la función $(\frac{2\lambda}{1-e^{-2\lambda\pi}})^{\frac{1}{2}} \chi_{\mathbb{T}^+} t^{i\lambda-1}$ genera a $\text{Im } B(\lambda)$. En particular la función $g_0 = \frac{\chi_{\mathbb{T}^+} t^{-1}}{\sqrt{\pi}}$ genera $\text{Im } B(0)$.

Demostración: La función

$$h_n(z) = 2i \frac{(z-i)^n}{(z+i)^{2+n}}$$

pertenece a $A^2(\mathbb{R}_+^2)$.

Ahora

$$\begin{aligned} \left((M \otimes I) h_n \right) (\lambda, \theta) &= 2i \int_0^\infty r^{-i\lambda} \frac{(re^{i\theta} - i)^n}{(re^{i\theta} + i)^{2+n}} dr \\ &= 2i \int_0^\infty r^{(-i\lambda+1)-1} \frac{(re^{i\theta} - i)^n}{(re^{i\theta} + i)^{2+n}} dr. \end{aligned}$$

Puesto que $(re^{i\theta} - i)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i)^{n-k} (re^{i\theta})^k$, donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial,

$$\left((M \otimes I) h_n \right) (\lambda, \theta) = 2i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i)^{n-k} (e^{i\theta})^k \int_0^\infty r^{-i\lambda} \frac{r^k}{(re^{i\theta} + i)^{2+n}} dr.$$

Usando la fórmula 1.3 de [11] obtenemos

$$\left((M \otimes I) h_n \right) (\lambda, \theta) = 2i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i)^{n-k} (e^{i\theta})^k \int_0^\infty r^{-i\lambda+k} \frac{1}{(re^{i\theta} + i)^{2+n}} dr.$$

Finalmente, mediante la fórmula 2.19 de [11] se tiene que

$$\begin{aligned} \left((M \otimes I) h_n \right) (\lambda, \theta) &= (-1)^n i^{-i\lambda-1} (e^{i\theta})^{i\lambda-1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{-k} \\ &\quad \times B(-i\lambda + 1 + k, n + i\lambda + 1 - k), \end{aligned}$$

donde $B(z, \omega)$ es la función Beta. De la última igualdad se obtiene el resultado. \square

Teorema 3.9 Las siguientes relaciones son válidas:

$$\|Q_i(g_\lambda)\|^2 = \frac{e^{-2\lambda\theta_i} - e^{-2\lambda\theta_{i-1}}}{e^{-2\lambda\pi} - 1}, \quad \lambda \neq 0$$

y

$$\|Q_i(g_0)\|^2 = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\sqrt{\pi}}$$

para $i = 1, \dots, m$.

Demostración: Sea $\lambda \neq 0$. De la definición de Q_i tenemos

$$\begin{aligned} \|Q_i(g_\lambda)\|^2 &= \frac{2\lambda}{1 - e^{-2\lambda\pi}} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} e^{-\lambda\theta} e^{-i\theta} \overline{e^{-\lambda\theta} e^{-i\theta}} d\theta \\ &= \frac{2\lambda}{1 - e^{-2\lambda\pi}} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} e^{-2\lambda\theta} d\theta \\ &= \frac{-1}{1 - e^{-2\lambda\pi}} (e^{-2\lambda\theta_i} - e^{-\lambda\theta_{i-1}}) \\ &= \frac{e^{-2\lambda\theta_i} - e^{-2\lambda\theta_{i-1}}}{e^{-2\lambda\pi} - 1}. \end{aligned}$$

El caso $\lambda = 0$ se prueba de manera análoga. \square

El comportamiento de $\|Q_i(g_\lambda)\|^2, i = 1, \dots, m$ cuando $\lambda \rightarrow \infty$, y cuando $\lambda \rightarrow -\infty$ está expuesto en el siguiente teorema.

Teorema 3.10 *Las siguientes relaciones son válidas*

- a) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \|Q_i(g_\lambda)\|^2 = 0$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|Q_i(g_\lambda)\|^2 = 0, \quad i = 2, \dots, m - 1.$
- b) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \|Q_1(g_\lambda)\|^2 = 0$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|Q_1(g_\lambda)\|^2 = 1.$
- c) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \|Q_m(g_\lambda)\|^2 = 1$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|Q_m(g_\lambda)\|^2 = 0.$

Demostración: Es consecuencia inmediata de las propiedades de la función exponencial. \square

Teorema 3.11 *El álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$, en un punto z_0 de la frontera de D donde convergen $m-1$ curvas de \mathcal{L} , es isomorfa a una subálgebra de*

$$C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^m \oplus M_m(\mathbb{C})).$$

El isomorfismo está dado por

$$a(z)I \mapsto \left((a_1(z_0), a_2(z_0), \dots, a_m(z_0)), \begin{pmatrix} a_1(z_0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_m(z_0) \end{pmatrix} \right)$$

$$B \mapsto B(\lambda) \mapsto ((0, 0, \dots, 0), (\sqrt{t_i t_j})),$$

donde $t_i = \frac{e^{-2\lambda\theta_i} - e^{-2\lambda\theta_{i-1}}}{e^{-2\lambda\pi} - 1}$, $i = 1, \dots, m$, $(t_1, t_2, \dots, t_{m-1}, t_m) \in \Delta_m$ y $(\sqrt{t_i t_j})$ denota la matriz cuya entrada i, j es $\sqrt{t_i t_j}$.

En la Figura 1 se puede ver el comportamiento de los puntos (t_1, t_2, t_3) para diferentes parejas de ángulos (θ_1, θ_2) en (3.12), donde $t_i = \|Q_i(g_\lambda)\|^2$.

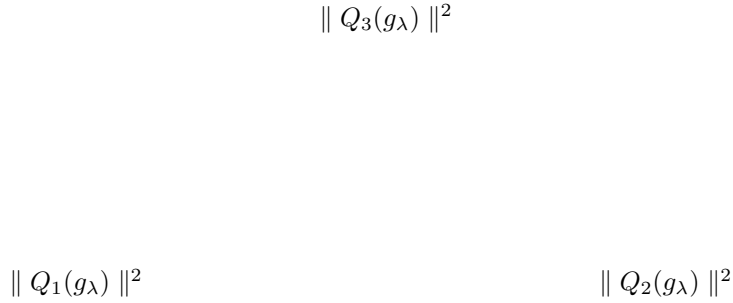


Figura 1: De arriba hacia abajo $(\theta_1, \theta_2) : (\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}), (\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}), (\frac{\pi}{16}, \frac{2\pi}{3}), (\frac{\pi}{25}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{50}, \frac{\pi}{2})$.

3.4 Álgebra local en un punto frontera donde convergen dos curvas

Si nos remitimos a la demostración del Teorema 3.5 veremos que el álgebra local, $\widehat{\mathcal{R}}(z)$ depende estrictamente de cuántos límites tienen las funciones de $PC(D, \mathcal{L})$ en z . Cuando únicamente existen dos límites en z , el álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(z)$ es generada por dos proyecciones ortogonales. Consideremos un punto x_0 del disco unitario y consideremos dos curvas bajo las condiciones emitidas al principio de esta sección. Supongamos que estas curvas dividen al disco en tres regiones delimitadas por ellas, digamos D_1, D_2 y D_3 . Introduzcamos el conjunto $PC(D_1, D_2, D_3)$ el cual está constituido por las funciones $a(z)$ tales que son continuas en $D \setminus \mathcal{L}$, tienen límites unilaterales en cada uno de los puntos de \mathcal{L} y que

$$(3.13) \quad a_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_1}} a(x) = a_3 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_3}} a(x).$$

Bajo estas condiciones para $a(z) \in PC(D_1, D_2, D_3)$, $a(z)I$ es localmente equivalente en x_0 a $a_1\chi_{D_1 \cup D_3}I + a_2\chi_{D_2}I$, donde

$$a_1 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_1}} a(x) \text{ y } a_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D_2}} a(x).$$

Además tenemos que B es localmente equivalente en x_0 a sí mismo. Consideremos la proyección P dada por $Pf = \chi_{D_2}f$. El álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(x_0)$ es isomorfa al álgebra generada por P y B y es una subálgebra de $C(\Delta) \otimes M_2(\mathbb{C})$, donde $\Delta = \text{Sp}(P - B)^2$. Por otro lado, el Teorema 3.11 implica que $\widehat{\mathcal{R}}(x_0)$ es una subálgebra de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3 \oplus M_3(\mathbb{C}))$. Denotemos por $U^{-1}BU$, P'_1 , P'_2 y $P'_3 = I - P'_1 - P'_2$ a las proyecciones obtenidas al transformar $L_2(D)$ en $L_2(\mathbb{R}_+^2)$ mediante el procedimiento utilizado en la sección anterior. Sean $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 = \pi$ los ángulos que determinan a las proyecciones Q_1, Q_2 y Q_3 (construidas por medio del Teorema 2.7). El siguiente corolario nos dará una pauta para determinar $\Delta = \text{Sp}(P - B)^2$.

Corolario 3.4 *El álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(x_0)$ en un punto $x_0 \in \partial D$ donde convergen dos curvas de \mathcal{L} bajo las condiciones enunciadas en esta sección es isomorfa a una subálgebra de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3 \oplus M_3(\mathbb{C}))$. La identificación está dada por la siguiente transformación de los generadores*

$$\begin{aligned} Q_2 &\rightarrow ((0, 1, 0) + (\delta_{22})), \\ B(\lambda) &\rightarrow ((0, 0, 0) + (\sqrt{t_i t_j})) \end{aligned}$$

donde $(t_1, t_2, t_3) \in \Delta_3$ y $t_i = \frac{e^{-2\lambda\theta_i} - e^{-2\lambda\theta_{i-1}}}{e^{-2\lambda\pi} - 1}$, $i = 1, 2, 3$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración: Es consecuencia directa del Teorema 3.11. \square

A través de una serie de cálculos la representación de Q_2 y $B(\lambda)$ en el corolario anterior nos conduce a

$$(3.14) \quad \text{Sp}(Q_2 - B(\lambda))^2 = \left\{ 0, 1 - \frac{e^{-2\lambda\theta_2} - e^{-2\lambda\theta_1}}{e^{-2\lambda\pi} - 1} \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Con estos resultados obtenemos el siguiente lema.

Lema 3.5 $\Delta = \text{Sp}(P - B)^2 = \{0\} \cup [l, 1]$ donde

$$l = 1 - \max_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{e^{-2\lambda\theta_2} - e^{-2\lambda\theta_1}}{e^{-2\lambda\pi} - 1} \right\}.$$

Demostración: Es resultado inmediato de las observaciones dadas antes del lema y del Teorema 3.10. \square

El Lema 3.5 nos indica que 0 es un punto aislado de $\text{Sp}(P - B)^2$. Cálculos sencillos permiten determinar que $-1 \notin \text{Sp}(I - P - B)$, por lo que se satisface la condición $i)$ ' del Teorema 2.5. Sea $\Delta_0 = [l, 1]$ y sea \mathcal{U}_0 el álgebra que consta de las funciones continuas $f : \Delta_0 \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ tales que $f(\Delta \cap \{1\}) \subset D_2(\mathbb{C})$.

Teorema 3.12 *El álgebra local $\widehat{\mathcal{R}}(x_0)$ en el punto x_0 es isomorfa e isométrica a $\mathbb{C} \oplus \mathcal{U}_0$. El isomorfismo está dado por la siguiente aplicación de los generadores*

$$\begin{aligned}\Phi_{x_0}(P) &= \left(0, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \quad t \in \Delta_0 \\ \Phi_{x_0}(B) &= \left(0, \begin{pmatrix} 1-t & \sqrt{t(1-t)} \\ \sqrt{t(1-t)} & t \end{pmatrix}\right), \quad t \in \Delta_0.\end{aligned}$$

4 Descripción del álgebra $\widehat{\mathcal{R}}$

Con el fin de visualizar gráficamente algunos resultados, consideraremos que $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, l_3\}$ es una colección de sólo tres curvas. Sin embargo, el tipo de discontinuidades en los puntos de la frontera de D serán de todos los tipos considerados en las secciones anteriores. Sea $z_0 \in \partial D$ el punto donde convergen las curvas l_1 y l_2 , $y_0 \in \partial D$, el punto donde converge la curva l_3 ; y sea $w_0 \in \partial D$, el punto donde convergen las curvas l_1 y l_3 (Figura 2).

Figura 2: $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, l_3\}$.

Denotemos por D_1, D_2, D_3 y D_4 a las regiones delimitadas por las curvas en \mathcal{L} como se muestra en la Figura 2. Consideremos la subálgebra \mathcal{C}_1 de $PC(D, \mathcal{L})$ que consiste de todas aquellas funciones tales que:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow w_0 \\ z \in D_1}} a(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow w_0 \\ z \in D_3}} a(z).$$

Estudiamos el álgebra \mathcal{R} generada por los operadores de la forma

$$A = a(z)B + b(z)(I - B) + K,$$

donde K es un operador compacto, $a(z)$ y $b(z)$ pertenecen a \mathcal{C}_1 .

Por medio del principio local de Douglas-Varela describiremos a $\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/\mathcal{K}(L_2(D))$. Como antes, el álgebra local de $\widehat{\mathcal{R}}$ en el punto z será denotada por $\widehat{\mathcal{R}}(z)$. Como subálgebra del centro usaremos $C(\overline{D})$. Son de importancia primordial las álgebras $\widehat{\mathcal{R}}(y_0)$, $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ y $\widehat{\mathcal{R}}(w_0)$ descritas en los teoremas 3.4, 3.11 y 3.12, respectivamente.

Para cada punto $z \in \overline{D} \setminus \{y_0, z_0, w_0\}$, $\widehat{\mathcal{R}}(z)$ tiene sólo representaciones irreducibles unidimensionales. Por otro lado, el Teorema 3.4 implica que $\widehat{\mathcal{R}}(y_0)$ sólo tiene representaciones irreducibles unidimensionales y bidimensionales; mientras que el Teorema 3.11 indica que $\widehat{\mathcal{R}}(z_0)$ admite únicamente representaciones irreducibles unidimensionales y tridimensionales. Finalmente, el Teorema 3.12 indica que las representaciones irreducibles del álgebra $\widehat{\mathcal{R}}(w_0)$ son unidimensionales y bidimensionales. La Figura 3 indica los diferentes tipos de representaciones en los puntos de \overline{D} .

Figura 3: Representaciones irreducibles del álgebra $\widehat{\mathcal{R}}$ en los puntos de \overline{D} .

Denotemos por \tilde{D} a la compactificación por \mathcal{L} de $(D_1 \cup D_3) \sqcup D_2 \sqcup D_4$ (Ver la Figura 4). Sea $\partial\tilde{D}$ el conjunto $\partial D \setminus \{y_0, z_0\}$ después de compactificar por los puntos y_0 , y z_0 . El punto y_0 origina dos puntos y_{01} y y_{02} (ordenados en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj) en \tilde{D} , y dos puntos más en $\partial\tilde{D}$, los cuales denotaremos por y_{03} y y_{04} en el mismo sentido que antes. El punto z_0 determina tres puntos z_{01}, z_{02}, z_{03} en \tilde{D} y dos puntos z_{04} y z_{05} en $\partial\tilde{D}$, bajo el proceso anterior. Con respecto al punto w_0 , éste determina dos puntos en \tilde{D} que llamaremos w_{01} y w_{02} .

Figura 4: Espacio de ideales maximales.

Cada uno de los puntos de $\partial\tilde{D} \sqcup \tilde{D}$ representa representaciones irreducibles del álgebra $\hat{\mathcal{R}}$. Todas ellas son unidimensionales y para unir las álgebras locales en los puntos frontera de discontinuidad tendremos que determinar cuales son las representaciones irreducibles que corresponden a las de los puntos en $\partial\tilde{D} \cup \tilde{D}$ determinados por el punto de discontinuidad en la frontera de D . A continuación veremos la forma en que las representaciones irreducibles de las álgebras $\hat{\mathcal{R}}(y_0)$, $\hat{\mathcal{R}}(z_0)$ y $\hat{\mathcal{R}}(w_0)$ se unen a las representaciones irreducibles determinadas por los puntos de $\partial\tilde{D} \cup \tilde{D}$. Comenzaremos con el punto z_0 , el Teorema 3.11 nos muestra que $\hat{\mathcal{R}}(z_0)$ es una subálgebra de $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{C}^3 \oplus M_3(\mathbb{C}))$. La identificación está dada por la siguiente transformación de los gene-

radores:

$$\begin{aligned} B &\rightarrow B(\lambda) \rightarrow ((0, 0, 0), (\sqrt{t_i t_j})), \\ Q_1 &\rightarrow ((1, 0, 0), (\delta_{11})), \\ Q_2 &\rightarrow ((0, 1, 0), (\delta_{22})), \\ Q_3 &\rightarrow ((0, 0, 1), (\delta_{33})), \end{aligned}$$

donde Q_1, Q_2 y Q_3 son las proyecciones determinadas por \mathcal{C}_1 y (t_1, t_2, t_3) pertenece al simplejo bidimensional Δ_3 y se satisface la relación

$$t_i = \frac{e^{-2\lambda\theta_i} - e^{-2\lambda\theta_{i-1}}}{e^{-2\lambda\pi-1}}.$$

El Teorema 3.10 implica que $\overline{\{\|Q_1(g_\lambda)\|^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}} = [0, 1]$.

Un generador A de \mathcal{R} puede representarse como $A = a(z)B + b(z)(I - B) + K$ donde K es un operador compacto. Recordando que

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \|Q_1(g_\lambda)\|^2 = 0 \text{ y } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|Q_1(g_\lambda)\|^2 = 1$$

podemos identificar cada $t_1 \in [0, 1]$ con el elemento correspondiente en $\overline{\{\|Q_1(g_\lambda)\|^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$ ($\|Q_1(g_\lambda)\|^2$ es uno a uno como función de $\lambda \in \mathbb{R}$) y así mediante el Teorema 3.11 podemos definir

$$A(t_1) = \begin{pmatrix} a_1 t_1 + b_1(1 - t_1) & (a_1 - b_1)\sqrt{t_1 t_2} & (a_1 - b_1)\sqrt{t_1 t_3} \\ (a_2 - b_2)\sqrt{t_1 t_2} & a_2 t_2 + b_2(1 - t_2) & (a_1 - b_1)\sqrt{t_2 t_3} \\ (a_1 - b_1)\sqrt{t_1 t_3} & (a_1 - b_1)\sqrt{t_2 t_3} & a_3 t_3 + b_3(1 - t_3) \end{pmatrix},$$

donde t_i , $i = 1, 2, 3$ es como antes, $f_i = \lim_{\substack{x \rightarrow z_0 \\ x \in D_i}} f(x)$ para $f \in PC(D, \mathcal{L})$.

Tenemos entonces

$$A(0) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

y

$$A(1) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$$

De aquí que la forma de pegar en el punto z_0 es la indicada en la Figura 5.

Figura 5: Pegado en el punto z_0 .

Notemos que en el punto y_0 tenemos un caso particular del anterior. Para pegar en el punto w_0 consideremos las representaciones para las proyecciones determinadas por \mathcal{C}_1 , que son denotadas por Q_1, Q_2 y Q_3 como en el primer caso. De aquí podemos ver que el elemento A puede ser representado en $\widehat{\mathcal{R}}(w_0)$ como una familia $\{A(t) \mid t \in [l, 1]\}$ donde l está dado en el Lema 3.5 y $A(t)$ es de la forma

$$A(t) = \left(b_1, \begin{pmatrix} a_2(1-t) + b_2t & (a_2 - b_2)\sqrt{t(1-t)} \\ (a_1 - b_1)\sqrt{t(1-t)} & a_1t + b_1(1-t) \end{pmatrix} \right), \quad t \in [l, 1].$$

En $t = 1$ tenemos

$$A(1) = \left(b_1, \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \right).$$

En la Figura 6 puede verse la forma de pegar en este punto.

Figura 6: Pegado en el punto ω_0 .

Consideremos los conjuntos $Y = \widetilde{D} \cup \partial\widetilde{D}$, $\overline{X}_1 = [0, 1]$, $\overline{X}_2 = [0, 1]$ y $\overline{X}_3 = [l, 1] \cup \{0\}$. Los extremos del i -ésimo intervalo en \overline{X}_i se denotarán por 0_i y 1_i , respectivamente. Unamos los puntos de Y a los puntos de

$\partial(\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2 \cup \overline{X}_3)$ mediante la función ζ definida como

$$\begin{aligned}\zeta(0_1) &= (y_{01}, y_{04}), \quad \zeta(1_1) = (y_{02}, y_{03}) \\ \zeta(0_2) &= (z_{01}, z_{02}, z_{05}), \quad \zeta(1_2) = (z_{03}, z_{02}, z_{04}), \\ \zeta(0_3) &= (w_{01}), \quad \zeta(1_3) = (w_{02}, w_0).\end{aligned}$$

Introduzcamos los conjuntos $X_1 = (0, 1)$, $X_2 = (0, 1)$, $X_3 = [l, 1)$, $\mathcal{M} = (\overline{X}_1 \cup \overline{X}_2 \cup \overline{X}_3) \cup_{\zeta} Y$, $F_1 = Y \times \mathbb{C}$, $F_2 = X_1 \times M_2(\mathbb{C})$, $F_3 = X_2 \times M_3(\mathbb{C})$ y $F_4 = X_3 \times M_2(\mathbb{C})$. Consideremos el haz C^* que tiene como espacio base a \mathcal{M} y como fibras a las álgebras C^* determinadas por los conjuntos F_1 , F_2 , F_3 y F_4 . Sea \mathcal{S} el álgebra de secciones continuas del haz anterior. Una sección $\sigma \in \mathcal{S}$ está constituida por cuatro funciones $\sigma_1 \in C(Y)$, $\sigma_2 \in C(\overline{X}_1, M_2(\mathbb{C}))$, $\sigma_3 \in C(\overline{X}_2, M_3(\mathbb{C}))$ y $\sigma_4 \in C(\overline{X}_3, \mathbb{C} \times M_2(\mathbb{C}))$ que cumplen las siguientes condiciones:

Si $\zeta(x_0) = (y_1, y_2)$, $x_0 \in \partial\overline{X}_1$, $y_1 \in \tilde{D}$, $y_2 \in \partial\tilde{D}$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma_2(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1(y_1) & 0 \\ 0 & \sigma_1(y_2) \end{pmatrix},$$

si $\zeta(x_0) = (y_1, y_2, y_3)$, $x_0 \in \partial\overline{X}_2$, $y_1 \in \tilde{D}$, $y_2 \in \tilde{D}$ y $y_3 \in \partial\tilde{D}$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma_3(x) = \begin{pmatrix} \sigma_1(y_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(y_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1(y_3) \end{pmatrix},$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \sigma_4(x) &= \left(\sigma_1(w_{01}), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \\ \lim_{x \rightarrow 1} \sigma_4(x) &= \left(\sigma_1(w_{01}), \begin{pmatrix} \sigma_1(w_{02}) & 0 \\ 0 & \sigma_1(w_0) \end{pmatrix} \right)\end{aligned}$$

La norma en \mathcal{S} está dada por

$$\|\sigma\| = \max \left\{ \sup_{y \in Y} |\sigma_1(y)|, \sup_{x \in \overline{X}_1} \|\sigma_2(x)\|, \sup_{x \in \overline{X}_2} \|\sigma_3(x)\|, \sup_{x \in \overline{X}_3} \|\sigma_4(x)\| \right\}$$

donde $\|\sigma_i(x)\|^2$, $i = 1, 2$ es el eigenvalor máximo de la matriz $\sigma_i(x)(\sigma_i(x))^*$.

Teorema 4.1 *El álgebra $\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/\mathcal{K}(L_2(D))$ es isomorfa isométrica al álgebra \mathcal{S} . El isomorfismo Φ transforma el generador*

$$A = a(z)B + b(z)(I - B) + K,$$

donde K es un operador compacto en

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= b(t), \quad t \in \tilde{D}, \\ \Phi(A) &= c(t), \quad t \in \partial\tilde{D},\end{aligned}$$

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} a(y_{01})x + b(y_{01})(1-x) & c(y_{01})\sqrt{x(1-x)} \\ c(y_{02})\sqrt{x(1-x)} & a(y_{02})(1-x) + b(y_{02})x \end{pmatrix},$$

$$\Phi(A) = \begin{pmatrix} d_1 & c(z_{01})\sqrt{t_1t_2} & c(z_{01})\sqrt{t_1t_3} \\ c(z_{02})\sqrt{t_1t_2} & d_2 & c(z_{02})\sqrt{t_2t_3} \\ c(z_{03})\sqrt{t_1t_2} & c(z_{03})\sqrt{t_2t_3} & d_3 \end{pmatrix},$$

$$\Phi(A) = \left(b(w_{01}), \begin{pmatrix} e_2 & c(w_{02})\sqrt{t(1-t)} \\ c(w_{01})\sqrt{t(1-t)} & e_1 \end{pmatrix} \right)$$

donde $x \in [0, 1]$, $c(z) = a(z) - b(z)$, $(t_1, t_2, t_3) \in \Delta_3$ $t_n = \|Q_n(g_\lambda)\|^2$, $n = 1, 2, 3$; $t \in [l, 1]$; $d_i = a(z_{0i})t_i + b(z_{0i})(1 - t_i)$ $i = 1, 2, 3$ y $e_j = a(w_{0j})(1 - t) + b(w_{0j})t$, para $j = 1, 2$.

Agradecimientos

Deseo agradecer a N. L. Vasilevski, quien propuso y dirigió este trabajo; a A. N. Karapetyants y J. Ramírez por las sugerencias para la realización del mismo.

Maribel Loaiza Leyva
Departamento de Matemáticas,
CINVESTAV-IPN,
A.P. 14-740,
México D.F. 07000,
México,
mloaiza@math.cinvestav.mx

Referencias

- [1] J. B. Conway, A Course in Funtional Analysis, Graduate Texts in Mathematics, 96, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1985.
- [2] J. Dauns and K. H. Hofmann, *Representation of rings by sections*, Memoirs of the American Mathematical Society, 83, Providence, R. I. 1968.

- [3] J. Dixmier, *C* Algebras*, North-Holland Mathematical Library, vol. 15, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford, 1977.
- [4] R. G. Douglas, *Banach Algebra Techniques in Operator Theory*, Second edition, Springer, 1998.
- [5] M. J. Dupré, *The clasification and structure of C*-Algebras bundles*, Mem. Amer. Math. Soc. 21 (1979), 222, i-ix, 1-77.
- [6] I. C. Gohberg and N. Krupnick, *One-dimensional Linear Singular Integral Equations, I. Introduction*, Operator Theory: Advances and Applications, 53. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
- [7] K. H. Hofmann, *Representation of algebras by continuous sections*, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1973), 291-373.
- [8] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 132, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [9] A. N. Karapetyants, V. S. Rabinovich and N. L. Vasilevski, *On algebras of two dimensional singular integral operators with homogeneous discontinuities in symbols*, Integral Equations Operator Theory (por aparecer).
- [10] S. G. Mikhlin and S. Prösdorf, *Singular Integral Operators*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1986.
- [11] F. Oberhettinger, *Tables of Mellin Transforms*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1974.
- [12] B. A. Plamenevski, *Algebras of Pseudodifferential Operators*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1989.
- [13] E. Ramírez de Arellano and N. L. Vasilevski, *Bargmann projection, three-valued functions and corresponding Toeplitz operators*, Operator theory for complex and hypercomplex analysis (Mexico City, 1994), 185–196, Contemp. Math., 212, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [14] J. Ramírez, *Algebra generada por la proyección de Bergman y un operador de translación*, Tesis de doctorado, Departamento de Matemáticas, CINVESTAV del IPN, 1999.

- [15] J. Varela, *Duality of C^* -algebras*, Recent advances in the representation theory of rings and C^* -algebras by continuous sections (Sem., Tulane Univ., New Orleans, La., 1973), 97–108, Mem. Amer. Math. Soc., 148, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974.
- [16] N. B. Vasil'ev, *C^* algebras with finite dimensional representation*, Russian Math.Surveys 21 (1966), 135-154.
- [17] N. L. Vasilevski and I. M. Spitkovsky, *Algebra generated by two projectors*, Dokl. Akad. Nauk Ukrain. SSR Ser. A 96 (1981), num. 8, 10-13.
- [18] N. L. Vasilevski, *Banach algebras produced by two dimensional integral operators with a Bergman kernel and Piecewise continuous coefficients I*, Investiya VUZ, matematika, 30 (1986), num. 2, 12-21.
- [19] N. L. Vasilevski, *Convolution operators on standard CR-manifolds II, Algebras of convolution operators on the Heisenberg group*, Integral Equations Operator Theory 19 (1994), num. 3, 327–348.