Morfismos, Vol. 6, No. 1, 2002, pp. 31-55

Delta-matroides rueda ternarios [*]

M. Guadalupe Rodríguez Sánchez [1]

Resumen

Un problema abierto en la teoría de representación de delta-matroides es el de hallar una lista de obstrucciones para $GF(3)$-representabilidad por medio de matrices antisimétricas. Se dá un primer paso en la resolución de este problema para una clase particular de delta-matroides llamados *delta − matroides rueda*. Estos delta-matroides son binarios y tienen asociadas ruedas como sus gráficas fundamentales. Se exhibe la lista de obstrucciones que caracteriza a esta clase con respecto a su representabilidad sobre el campo $GF(3)$. Por otro lado, también se exhiben dos delta-matroides cuyas gráficas fundamentales son ruedas parciales y que son menores de una clase bien definida de delta-matroides. Estos son $D_{W_{3,6}}$, que es obstrucción para la ternaridad de los delta-matroides inducidos por ruedas parciales alternadas del tipo $W_{k,2k}$, con k impar, y $D_{W_{4R}}$ que es obstrucción para ternaridad de los delta-matroides $D_{W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}}$ cuyas gráficas fundamentales son ruedas parciales, caracterizadas informalmente, por tener tres rayos consecutivos y un rayo no consecutivo a los anteriores.

2000 Mathematics Subject Clasification: 05B35.
Keywords and phrases: delta-matroides, obstrucciones, ternaridad.

1 Introducción

En este artículo se caracterizan aquellos delta-matroides binarios que tienen como gráficas fundamentales a ruedas, así como a dos clases de

[*]El contenido de este trabajo representa parte de la tesis de grado presentada por la autora dentro del programa de doctorado del Departamento de Matemáticas del CINVESTAV.

[1]Universidad Autónoma Metropolitana, UAM-A.

delta-matroides binarios cuyas gráficas fundamentales son ruedas parciales, la primera clase es inducida por ruedas del tipo $W_{k,2k}$ y la segunda por ruedas del tipo $W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}$. Estos resultados se pueden ver dentro de un contexto más general, determinado por el problema de caracterizar los delta-matroides binarios $D{=}(V,\mathcal{F})$ representables mediante matrices antisimétricas tales que admiten un signado de su matriz de representación, de tal manera que la matriz signada sea una matriz de representación para el delta-matroide D, sobre el campo $GF(3)$. Es decir, la clase de delta-matroides binarios que a su vez son ternarios.

Se tiene que las gráficas fundamentales de los delta-matroides rueda minimales no ternarios están fuertemente conectados con la lista de obstrucciones de gráficas circulares dadas por Bouchet [11]. De hecho ambas listas difieren sólo en el delta-matroide cuya gráfica fundamental es W_6, que es la rueda usual con seis rayos.

Las gráficas circulares están relacionadas con estructuras matroidales. Se sabe que las gráficas fundamentales de un matroide son siempre bipartitas y que dado un delta-matroide par, este es Δ-equivalente a un matroide si y sólo su gráfica fundamental es bipartita, ver [8]. Ahora bien, una gráfica bipartita es una gráfica circular si y sólo si es la gráfica fundamental de un matroide plano; es decir, un matroide gráfico construído a partir de una gráfica plana. En este contexto, es importante notar que los delta-matroides que no provienen de un matroide tienen gráficas simples como sus gráficas fundamentales.

Considérese $G = (V, E)$ una gráfica simple. Sea G^s la gráfica G con una orientación de sus aristas, y sea A la matriz de adyacencia de G^s. $A{=}\{A_{uv} : u, v \in V\}$ es una matriz antisimétrica cuyas entradas pertenecen al conjunto $\{0, 1, -1\}$ tal que $A_{uv}{=}{+}1$ si y sólo si uv es una arista orientada de u a v, V es el conjunto de los vértices de G. La orientación de G^s se dice que es *unimodular* si A satisface:

$$det\ (A[W]) \in \{-1, 0, 1\}, \qquad W \subseteq V. \qquad\qquad (*)$$

Bouchet [4] establece que toda gráfica circular admite una orientación unimodular. Ahora bien, se dice que un delta-matroide binario es *regular* si existe un signado de su matriz binaria de representación que cumpla la propiedad (*).

Se tiene que W_6 no puede orientarse de forma unimodular. W_5, que es una obstrucción para las gráficas circulares, está contenida en W_6, como gráfica circular, es decir $W_5{=}((W_6\Delta\{0\})\backslash\{0\})\Delta\{x\}$ para cualquier $x \in \{1, ..., 6\}$. Es importante notar que D_{W_5} como delta-matroide, no es un menor de D_{W_6}, de hecho D_{W_6} es minimal no ternario, en su representación con matrices antisimétricas.

El conocido teorema de Tutte para matroides regulares, ha sido generalizado para delta-matroides tanto en su representación simétrica como antisimétrica [17]. Para el caso antisimétrico se puede enunciar de la siguiente forma: sea D un delta-matroide par, D es regular si y sólo si D es representable sobre los campos $GF(2)$ y $GF(3)$. De esta manera un delta-matroide binario es regular si y sólo si es ternario. Luego las gráficas circulares minimales para las cuales no existe una orientación unimodular, son delta-matroides binarios que no pueden ser representados sobre $GF(3)$, por medio de matrices antisimétricas. Por lo dicho anteriormente, se tiene que la caracterización de los delta-matroides ternarios dá como corolario la caracterización de los delta-matroides regulares, problema fundamental dentro de esta teoría, que aún sigue abierto. Esta es una de las motivaciones centrales de este trabajo. Aunque las obstrucciones aquí presentadas se pueden hallar en parte a partir de la unimodularidad de las gráficas circulares y en parte mediante el estudio emprendido por Geelen sobre los delta-matroides regulares, cabe resaltar que aquí se obtienen en forma unificada, por métodos técnicamente distintos, que pueden ser generalizados para la resolución del problema general. De hecho ya se tienen avances importantes en esta dirección.

2 Conceptos Fundamentales de Delta-matroides

Un $delta - matroide$ es una pareja $D = (V, \mathcal{F})$, con V un conjunto finito y $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de V, que cumple un axioma de cambio de base:

$(\mathbf{A\Delta})$ Para $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ y $x \in F_1 \Delta F_2$, existe $y \in F_1 \Delta F_2$, tal que $F_1 \Delta \{x, y\} \in \mathcal{F}$.

A los elementos de $\mathcal{F}$ se les llama *bases* de D, Δ es el operador diferencia simétrica entre conjuntos.

Una *aplicación* Δ es una operación que convierte a D en $D' = D\Delta X$ $= (V, \mathcal{F}\Delta X)$ donde $\mathcal{F}\Delta X = \{F \Delta X : F \in \mathcal{F}\}$ y $X \subseteq V$. Se dice que D' es un delta-matroide Δ-*equivalente* a D.

$(V, \mathcal{F})$ es un matroide si y sólo si $(V, \mathcal{F})$ es un delta-matroide tal que sus bases son equicardinales. Si M es un matroide entonces $M\Delta V$ es el matroide dual de M.

Se dice que un delta-matroide D es *representable* o tiene una representación lineal sobre un campo $\mathbf{F}$ si existe una $(V \times V)$-matriz A simétrica o antisimétrica, con entradas en $\mathbf{F}$, que cumple que:

$$A[F] \text{ es no singular} \Longleftrightarrow F \in \mathcal{F},$$

donde $A[F]=\{A_{i,j} : i, j \in F, F \subseteq V\}$. A las matrices $A[F]$ se les llama *submatrices principales*. Por convención se considera $A[F]$ no singular, si $F = \emptyset$.

Si A es una $(V \times V)$-matriz simétrica o antisimétrica, se denota por $D(A)$ al delta-matroide que se obtiene tomando como sus bases a los $F \subseteq V$ tales que $A[F]$ son las submatrices principales no singulares de A. Un delta-matroide $D = (V, \mathcal{F})$ tal que $\emptyset \in \mathcal{F}$ se dice que es *normal*. Así todo delta-matroide representable es normal.

Considérense $x \in V$ y los conjuntos dados a continuación:

$$\mathcal{F} \setminus x = \{F : F \subseteq V \setminus x, F \in \mathcal{F}\},$$
$$\mathcal{F} \circ x = \{F : F \subseteq V \setminus x, F \cup \{x\} \in \mathcal{F}\}.$$

Se definen dos *menores elementales* de un delta-matroide, el primero como $D\backslash x = (V\backslash x, \mathcal{F}\backslash x)$, $D\backslash x$ es un menor elemental de D obtenido por *borrado* del elemento x; el segundo se define como $D \circ x = (V \setminus x, \mathcal{F} \circ x)$, $D \circ x$ es un menor elemental de D obtenido por *contracción* del elemento x. En general, un *menor* se obtiene tomando varios menores elementales sucesivamente, sin importar el orden en que esto se realice. A. Bouchet [9] probó que todo menor normal de un delta-matroide representable sobre $\mathbf{F}$ con una matriz antisimétrica es también $\mathbf{F}$-representable por medio de una matriz antisimétrica.

Una propiedad importante, relativa a la toma de menores y su relación con la operación Δ, se encuentra en [9]. Se enuncia a continuación, pues será de gran ayuda en el desarrollo de este trabajo. Para todo delta-matroide $D = (V, \mathcal{F})$, $x \in V$ y $F \subseteq V$, se cumple:

$$\textbf{(P)} \qquad (D\Delta F) \setminus x = (D \circ x)\Delta(F - x) \quad \text{si} \quad x \in F.$$

Sea $D=(V, \mathcal{F})$ un delta-matroide y sea F una base de D. Se define la gráfica simple $G_D(F)=(V, E_D)$, con $E_D=\{xy : F\Delta\{x, y\} \in \mathcal{F}\}$. A $G_D(F)$ se la llama la *gráfica fundamental* del delta-matroide D respecto a F. En este trabajo solamente se usarán gráficas fundamentales respecto al $\emptyset$ y se hará referencia a ellas simplemente como las gráficas fundamentales del delta-matroide en cuestión.

Un delta-matroide para el cual todas sus bases tienen la misma paridad, esto es la misma cardinalidad módulo 2, se dice que es *par*. En otro caso, se dice que el delta-matroide es *impar*. Un matroide es un caso particular de un delta-matroide par, esto debido a la equicardinalidad de sus bases.

3 Signados y Orientaciones

Dada una $(V \times V)$-matriz antisimétrica A, con entradas $\{0, 1\}$, cabe aclarar que en el caso binario, una matriz antisimétrica es una matriz simétrica con su diagonal principal nula. Se define A' como una matriz *signada* que proviene de A, si a cada entrada 1 de A le corresponde en A', $+1$ o -1. Se dice que A tiene un *signado compatible* si para toda submatriz principal de A, sea esta $A[X]$ con $X \subseteq V$, se cumple que $det_2 A[X] \neq 0 \Rightarrow det_3 A'[X] \neq 0$ para toda $X \subseteq V$, donde det_r denota al determinante de $A[X]$ calculado sobre el campo $GF(r)$, $r = 2, 3$.

Sea $D = (V, \mathcal{F})$ un delta-matroide binario normal que puede ser representado mediante una matriz antisimétrica A_D=$[a_{ij}]$ con $i, j \in V$. Se considera la gráfica simple G_{A_D}, tal que A_D es su matriz de adyacencia. G_{A_D} es la gráfica fundamental de D, relativa a A_D. Así G_{A_D} es una gráfica cuyos vértices son los elementos de V y hay una arista de i a j, si $a_{i,j} \neq 0$; $i, j \in V$.

Dado que existe una correspondencia biyectiva entre las gráficas simples y sus matrices de adyacencia, es equivalente estudiar una matriz antisimétrica A y su gráfica fundamental G_A, así se puede ver el signado de A como una orientación de G_A. Sea A=$[a_{ij}]$ con $i, j \in V$, si $a_{ij} = +1$, se pone una flecha del vértice i al vértice j, si $a_{ij} = -1$, se pone una flecha del vértice j al vértice i.

En las matrices de representación se consideran los renglones y columnas etiquetados por los elementos de V. Considérese $x \in V$, se dice que se realiza una *operación conmutador* sobre x en A' si se cambian los signos en el renglón y la columna de A' que tienen como etiqueta a x. El efecto de esta operación sobre G_A es invertir las orientaciones de las aristas incidentes a x. En G_A, a la operación descrita se la llama una *operación válida* sobre x.

Lema 3.1 *La operación conmutador sobre $x \in V$ no altera los determinantes de las submatrices $A'[X]$, $X \subseteq V$.*

Este lema se obtiene directamente aplicando las propiedades de los determinantes.

Para el estudio de representabilidad de delta-matroides son importantes dos hechos: la obtención y análisis de los delta-matroides Δ-equivalentes y la obtención de sus menores. Para un delta-matroide binario D, con una matriz de representación antisimétrica A, se pueden estudiar directamente sobre la gráfica G_A las operaciones mencionadas. Considérese $G_A{=}(V_G, E_G)$ una gráfica simple. Para $U_1, U_2 \subseteq V_G$ se define $[U_1, U_2]{=}\{u_1u_2 \in E_G : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$, *complementar* $[U_1, U_2]$ consiste en borrar todas las aristas de $[U_1, U_2]$ y poner una arista, para todo par no ordenado u_1u_2, $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ la cual no era una arista en G_A. Sean $uw \in E_G$, $B{=}N(u) \setminus N(w)$, $C{=}N(u) \cap N(w)$ y $D{=}N(w) \setminus N(u)$, donde $N(v)$ denota el conjunto de los vértices adyacentes a v en una gráfica, $v \in \{u, w\}$. Una *complementación local* a lo largo de uw es la operación que consiste en complementar los conjuntos de aristas $[B, C]$, $[C, D]$ y $[D, B]$. Un *pivoteo* de G_A en uw es la operación que consiste en efectuar una complementación local de G_A a lo largo de uw y después intercambiar las etiquetas u y w.

Considérense $D_1{=}(V, \mathcal{F}_1)$ un delta-matroide, A_1 una matriz de representación de D_1 sobre $GF(2)$ y G_{A_1} su gráfica fundamental. Sea xy una arista de G_{A_1}, si se realiza un pivoteo en esta gráfica a lo largo de xy, se obtiene G_{A_2}, que es la gráfica fundamental de un delta-matroide $D_2{=}(V, \mathcal{F}_2)$ que es Δ-equivalente a D_1. Este pivoteo sobre la matriz A_1 se ve como un pivoteo respecto a la submatriz no singular $A_1[\{x, y\}]$. Para $D = (V, \mathcal{F})$ un delta-matroide, A una matriz binaria de representación de D y $x \in V$, se puede dar una interpretación de la toma de menores elementales del delta-matroide D utilizando la gráfica fundamental relativa a A. Para obtener la gráfica fundamental de $D \setminus x$, se borra el vértice x y todas las aristas de G_A incidentes a x. La gráfica fundamental de $D \circ x$ se obtiene, de la siguiente manera, se considera una arista xy de G_A, entonces por **(P)** se tiene:

$$(D\Delta\{x, y\}) \setminus x = (D \circ x)\Delta\{y\} \ ,$$

luego basta con realizar un pivoteo sobre la arista xy y borrar, después, el vértice x.

A continuación se dan dos lemas importantes para abordar el estudio del problema planteado. El primero se refiere al valor de los determinantes asociados a los circuitos inducidos de una gráfica. El segundo relaciona el estudio de representabilidad de los delta-matroides pares, con representaciones mediante matrices antisimétricas.

Lema 3.2 *Sean A una matriz antisimétrica con entradas en $GF(2)$ y G_A su gráfica de adyacencia. Para todo circuito inducido C de G_A se cumple que $det_2(C)$=0.*

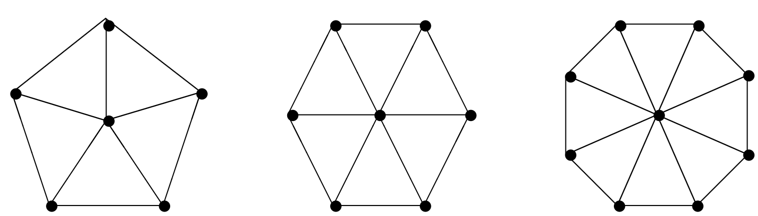
Demostración: La matriz de adyacencia asociada a un circuito inducido de una gráfica presenta dos 1's en cada renglón y en cada columna. El lema se tiene, del hecho de que cualquier renglón es combinación lineal de los otros, así el determinante que le corresponde sobre $GF(2)$ es cero. $\square$

Lema 3.3 *Si A es una $(V \times V)$-matriz antisimétrica, entonces $D(A)$ es un delta-matroide par.*

Demostración: Este lema es consecuencia del hecho de que para una matriz antisimétrica se tiene que todos los determinantes de las submatrices principales de orden impar son cero. $\square$

4 Delta-matroides rueda

Un $k-$*ciclo*, denotado por C_k, es una gráfica simple, conexa, regular de grado 2, con k vértices. La *rueda* W_k se construye agregando un vértice central 0, adyacente a cada uno de los vértices de C_k. A C_k se le llama el *aro* de la rueda y a las aristas que unen el vértice 0 con cada vértice del aro se les llama *rayos*. Una *rueda parcial* $W_{h,k}$, $2 \leq h \leq k$, es una rueda W_k, con $k-h$ rayos borrados. Los vértices de C_k, se numeran consecutivamente de 1 a k, de tal manera que a todo vértice i, recorriendo el aro hacia la derecha, le sigue $i+1$, para $i = 1, ...k-1$. Una rueda parcial *alternante* es una rueda de la forma $W_{k,2k}$ tal que hay un rayo del vértice central a cada uno de los vértices impares (o pares) del aro.



Ruedas W_5, W_6 *y* W_7
Figura 1.

Un delta-matroide *rueda* D_{W_k} es un delta-matroide binario, tal que su gráfica fundamental es W_k, $k \in Z^+, k \geq 3$. Si A_{W_k} es la matriz de adyacencia de W_k, entonces D_{W_k}=$D(A_{W_k})$. Es decir, D_{W_k}=$(V, \mathcal{F}_{W_k})$, donde $V = \{0, 1, 2, ..., k\}$ y $\mathcal{F}_{W_k}$= $\{X \subseteq V; A_{W_k}[X]$ es no-singular$\}$. De esta forma A_{W_k} es una representación lineal de D_{W_k} sobre $GF(2)$. De la misma manera toda rueda parcial $W_{h,k}$ origina un delta-matroide $D_{W_{h,k}}$.

En esta sección, se demuestra que hay tres delta-matroides rueda minimales que no son ternarios; es decir que no son $GF(3)$-representables mediante matrices antisimétricas, y que no hay ningún otro delta-matroide rueda que sea minimal con esta propiedad.

El problema de $GF(3)$-representabilidad del delta-matroide D_{W_k} con A_{W_k} su matriz de representación binaria asociada, puede verse como antes, D_{W_k} es $GF(3)$-representable si existe un signado de A_{W_k} tal que la matriz signada $A^s_{W_k}$ es antisimétrica y para todo F, base de D_{W_k} sobre $GF(2)$, F es también una base sobre $GF(3)$. O equivalentemente en términos de la gráfica fundamental W_k, correspondiente al delta-matroide D_{W_k}, D_{W_k} es $GF(3)$-representable, si existe una orientación compatible de W_k, a partir de la matriz A_{W_k}.

Lema 4.1 *Sea una gráfica que consiste sólo de un camino cerrado p con un número impar de aristas. Dada una orientación arbitraria de sus aristas, p puede transformarse en un camino cerrado con todas sus aristas orientadas en un sólo sentido, mediante un número finito de operaciones válidas sobre los vértices de p.*

Demostración: Sea m el número de aristas de p. Considérese una orientación arbitraria de p, elíjase cualquier arista a, considérese la orientación de a, esta conduce a una partición de las aristas de p. Se dice que las aristas que están orientadas con la dirección de a, están en la clase I, las restantes pertenecen a la clase II. Como el número de aristas de p es impar, la cardinalidad de una clase es par y la de la otra clase es impar. Píntense de azul las aristas de la clase con cardinalidad par y de rojo, las restantes, Llámese un *segmento* a cada subconjunto maximal de aristas de p tal que sus aristas adyacentes tienen un mismo color. El resultado de hacer esto es que se obtiene un número par de segmentos de aristas, alternados en colores. Sea n=2k, con $k \in \mathbf{Z}^+$, el número de segmentos de p. El lema será demostrado por inducción sobre k. Sea k=1, entonces el camino tiene dos segmentos, uno cardinalidad par y otro impar. Se aplica, sobre el camino par la siguiente estrategia: se consideran los vértices extremos del segmento de cardinalidad par. Empezando por cualquiera de estos, se numera el primero con 1, el siguiente sobre el camino con 2 y asi sucesivamente hasta terminar en el otro vértice extremo. Se efectúa sobre los vértices pares una operación conmutador. De esta manera las aristas azules se convierten en rojas, quedando todo el camino rojo. Es decir, con una única orientación.

Supóngase que el lema se cumple para k, se demostrará que también es válido para $k+1$. Sea $n = 2(k+1)$, hay $k+1$ segmentos de cada color. Se tienen dos casos:

CASO 1. Si k+1 es impar debe haber, al menos, un segmento azul de cardinalidad par, pues si todos los segmentos azules fueran de cardinalidad impar, como hay un numero impar de segmentos, habría un número impar de aristas azules, lo cual sería una contradicción.

Se aplica sobre un segmento par la estrategia descrita en el paso 1 de inducción, con lo cual se obtienen k segmentos de cada color. Luego se tiene el lema.

CASO 2. Si $k+1$ es par, debe haber al menos, un segmento rojo de cardinalidad par. Si no fuera así, todos los segmentos rojos serían impares y como hay un número par de ellos, el número de aristas rojas sería par, lo cual contradice la coloración inicial.

Se procede como en el caso 1 sobre un segmento rojo de cardinalidad par, obteniendo $2k$ segmentos, los cuales se sabe se pueden orientar en un sólo sentido, por argumentos de inducción. □

Teorema 4.2 *D_{W_5}, D_{W_6} y D_{W_7} son delta-matroides rueda minimales no representables sobre $GF(3)$, mediante matrices antisimétricas.*

Demostración: Supóngase que D_{W_5}, D_{W_6} y D_{W_7} son delta-matroides que son $GF(3)$-representables con matrices antisimétricas, entonces existen sus correspondientes matrices de representación, sean estas A_5, A_6 y A_7. De manera natural, cada una de ellas induce una orientación de las gráficas W_5, W_6 y W_7. Sea A_k^b la matriz de representación de D_{W_k} sobre $GF(2)$, esta se obtiene de A_k sustituyendo las entradas -1 por 1, $k = 5, 6, 7$. Luego, debe cumplirse que:

$$det_2 A_k^b[X] \neq 0 \Leftrightarrow det_3 A_k[X] \neq 0, \qquad (**)$$

para todo $X \subseteq V$.

Considérese W_k y sean c_i los cuadrados, tales que sus vértices son 0, i y los dos vértices consecutivos en el aro, tomados a la derecha de i. Todo cuadrado c_i tiene cuatro orientaciones posibles, llamense las tres primeras Or_1 Or_2 y Or_3, en el orden que se presentan a continuación:

$$[\uparrow\substack{\longrightarrow \\ \longleftarrow}\downarrow], \quad [\uparrow\substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow}\uparrow], \quad [\uparrow\substack{\longleftarrow \\ \longrightarrow}\downarrow].$$

Para dichas orientaciones se cumple que:

$$det_2 A_k^b[c_i] = det_3 A_k[c_i] = 0.$$

Para la cuarta se tiene que:

$$det_3 A_k[\uparrow\substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow}\downarrow] \neq 0,$$

La última orientación será llamada orientación μ. Es importante hacer dos observaciones: la primera es que la diagonal que aparece en los c_i no contribuye al valor del determinante, la segunda es que toda orientación de W_k induce una orientación de cada uno de los cuadrados $c_1, ..., c_k$, y recíprocamente, al orientar los cuadrados $c_1, ..., c_{k-1}$ se construye una orientación de W_k, para $k = 5, 6, 7$.

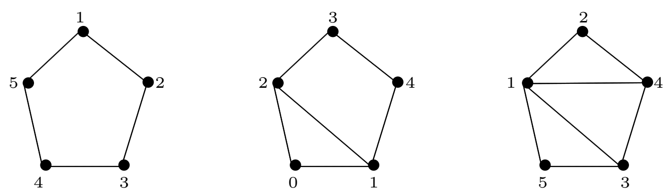
En [9] se demuestra que no existe una orientación compatible para W_5, luego D_{W_5} no es $GF(3)$-representable con matrices antisimétricas. A_7 debe tener un signado compatible, ya que por hipótesis, D_{W_7} es ternario. Considérese la orientación correspondiente para W_7. Por el lema 4.1, se puede efectuar un número finito de operaciones conmutador sobre las aristas del aro, de manera que el aro de W_7 quede orientado en un sólo sentido. Si se hace lo anterior, para W_7 existen dos orientaciones posibles, estas son: Or_1 Or_1 Or_2 Or_2 Or_1 Or_1 o Or_2 Or_2 Or_1 Or_1 Or_2 Or_2. En los dos casos mencionados, los cuadrados $c_1, c_2, ..., c_{k-1}$ presentan una orientación compatible, pero el cuadrado c_k queda con la orientación μ. Esto contradice la representabilidad de W_7.

Para el análisis de W_6, se pueden orientar compatiblemente todos los cuadrados $c_1, c_2, ..., c_k$, sin que ocurra la orientación μ, con una orientación de este tipo, el aro nunca queda orientado en una sola dirección. Considérese cualquier orientación de W_6 que evite la orientación μ de sus cuadrados, esta orientación nos induce un signado antisimétrico de la matriz A_6. Esta matriz cumple (**) para los $X \subseteq V$ tales que $\mid X \mid= 2$ y $\mid X \mid= 4$. Sólo resta considerar $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ que corresponde al aro de W_6. Considérense las orientaciones de C_6, el circuito con seis aristas, hay dos clases disjuntas de orientaciones, llámense estas Or_A y Or_B. Se dirá que dos orientaciones pertenecen a una misma clase si se puede pasar de una a otra mediante un número finito de operaciones conmutador, aplicadas a los vértices de C_6. Sea Or_A la orientación que tiene un número par de aristas orientadas en cada dirección y Or_B la orientación que tiene un número impar de aristas en cada dirección. Se tiene que $det_3 F = 0$ con Or_A y $det_3 F \neq 0$ con Or_B, pero $det_2 F = 0$. Luego si D_{W_6} es $GF(3)$-representable, el aro debe tener la orientación Or_A.

Esto no es posible si todos los cuadrados tienen una orientación distinta de la orientación μ. Por lo tanto, no existe una orientación para W_6 que se traduzca en una representación de D_{W_6} sobre $GF(3)$. Esto contradice la suposición inicial.

Falta mostrar que D_{W_5}, D_{W_6} y D_{W_7} son minimales, no representables sobre $GF(3)$, con matrices antisimétricas. Debido a la simetría de D_{W_k}, sólo se deben analizar cuatro menores elementales distintos, para cada D_{W_k}:

$D_{W_k} \setminus \{0\}, D_{W_k} \circ \{0\}, DW_k \setminus \{x\}$ y $D_{W_k} \circ \{x\}$ con $x \in \{1, ..., k\}$.



M_1 M_2 M_3

Menores de W_5
Figura 2.

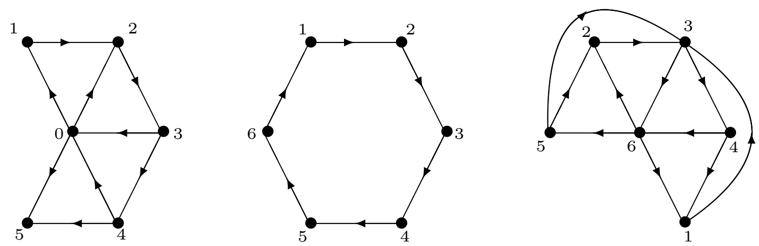
Para D_{W_5} se tiene que sus cuatro menores elementales son Δ-equivalentes, es decir, partiendo de uno de sus menores elementales se pueden obtener los restantes realizando complementaciones locales sobre las aristas de su gráfica fundamental. Sean $M_1 = D_{W_5} \setminus \{0\}$, $M_2 = D_{W_5} \circ \{5\}$ y $M_3 = D_{W_5} \circ \{0\} \cong D_{W_5} \setminus \{5\}$, tal como aparecen en la figura 2. Se tiene que $M_2 = M_1 \Delta \{3, 4\}$ y $M_3 = M_2 \Delta \{0, 1\}$. Se dá una matriz de representación de $D_{W_5} \setminus \{5\}$ sobre $GF(3)$:

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	1	-1	-1
1	-1	0	1	0	0
2	-1	-1	0	1	0
3	1	0	-1	0	1
4	1	0	0	-1	0

.

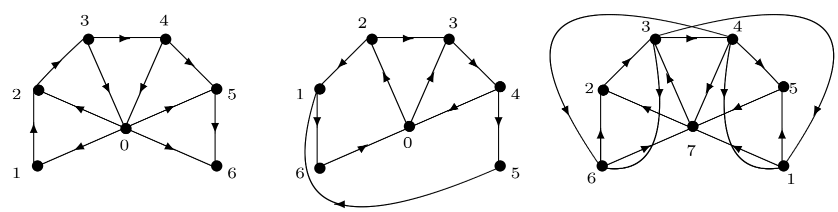
Para D_{W_6}, $D_{W_6} \setminus \{6\}$ es isomorfo a $D_{W_6} \circ \{6\}$, luego basta exhibir las orientaciones de las gráficas fundamentales correspondientes a $D_{W_6} \setminus$

$\{6\}, D_{W_6} \setminus \{0\}$ y $(D_{W_6} \circ \{0\})\Delta\{6\}$. Estas aparecen en la figura 3, en el orden mencionado.



Menores de D_{W_6}
Figura 3.

Para D_{W_7}, se exhiben las gráficas fundamentales que corresponden a una $GF(3)$-representación para cada uno de sus menores elementales. En la figura 4, aparecen en el siguiente orden: $D_{W_7} \setminus \{7\}$, $(D_{W_7} \circ \{7\})\Delta\{6\}$ y $(D_{W_7} \circ \{0\})\Delta\{7\}$.



Menores de D_{W_7}
Figura 4.

La gráfica fundamental correspondiente al menor $D_{W_7} \setminus \{0\}$ es un circuito con 7 aristas orientadas en un sólo sentido. $\square$

Proposición 4.3 *D_{W_3} y D_{W_4} son $GF(3)$-representables, mediante matrices antisimétricas.*

Demostración: Para demostrar esta proposición, basta exhibir las matrices de representación de D_{W_3} y D_{W_4}. Estas son, en el orden correspondiente:

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	1	1	-1
1	-1	0	1	-1
2	-1	-1	0	1
3	1	1	-1	0

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	1	-1	-1
1	-1	0	1	0	-1
2	-1	-1	0	1	0
3	1	0	-1	0	1
4	1	1	0	-1	0

$\square$

Sea $n \in \mathbf{Z}^+$, $n \geq 3$. Para tener una caracterización completa de los delta-matroides rueda, falta investigar que ocurre con los D_{W_n}, para $n \geq 8$. A continuación se dan algunas reducciones sobre W_n que corresponden a una simplificación de los delta-matroides D_{W_n}, por medio de toma de menores.

Las fórmulas de reducción están referidas a la etiquetas originales de W_n. Las reducciones que se proponen involucran complementaciones locales sobre algunas aristas de la gráfica W_n, en sentido estricto debería hacerse un pivoteo, pero esta operación implicaría un cambio de etiquetas de algunos vértices, lo cual complicaría bastante la notación. Este proceso preserva la estructura de los delta-matroides involucrados, que es lo que en último caso, importa al realizar las reducciones. Por último, con el objeto de tener claridad al describir las reducciones sobre la rueda W_n , se denotará una arista uv como el conjunto formado por sus vértices, es decir $\{u, v\}$.

REDUCCION 1.

Sea $n = 3k$. La reducción consiste en realizar una complementación local sobre cada arista de W_n, de la forma $(2 + 3i, 3 + 3i)$ con $i = 0, ..., k-1$; seguida del borrado de los vértices que forman las aristas anteriores, es decir:

$(D_{W_n}\Delta\{2,3\}\Delta...\Delta\{2+3(k-1), 3+3(k-1)\}) \setminus \{2\} \setminus \{3\} \setminus ... \setminus \{2+3(k-1)\} \setminus \{3+3(k-1)\}$.

REDUCCION R.

Se define un $6-$*segmento* sobre una rueda W_n como una sucesión de seis aristas consecutivas sobre el aro de W_n. Así mismo se define un *cuasi* $6 - segmento$, como cualquier sucesión de menos de seis aristas consecutivas sobre el aro de W_n.

PROCESO DE LA REDUCCION R:

Sea W_n una rueda con sus vértices etiquetados como de costumbre. Para $n \geq 9$.

1. Considérese la siguiente descomposición de n: $n = 6s + r$, s es el número de 6-segmentos en W_n y r es el número de aristas del cuasi 6-segmento restante, se toman consecutivamente los s 6-segmentos iniciando con el 6-segmento con vértices etiquetados del 1 al 7.

2. Paso general de la reducción:

Este paso se efectúa sobre cada 6-segmento. Considérese el k-ésimo 6-segmento, $k \in \{0, ..., s-1\}$. La numeración en los 6-segmentos es la inicial.

La reducción sobre el 6-segmento k, se hace como sigue:

i . $\Delta\{2+6k, 3+6k\}$ $\Delta\{3+6k, 4+6k\}$ $\Delta\{5+6k, 6+6k\}$,

ii . $\setminus\{2+6k\} \setminus \{3+6k\} \setminus \{5+6k\} \setminus \{6+6k\}$.

Cada vez que se efectúa este paso, se eliminan cuatro vértices del k-ésimo 6-segmento de W_n. El paso 2 se realiza para cada k, con $k \in \{0, ..., s-1\}$.

3. No se hace ninguna operación sobre el cuasi 6-segmento. Este forma parte de la rueda reducida.

Proposición 4.4 *Sean $k, n \in Z$.*

Si $k \geq 3$ entonces todo delta-matroide $D_{W_{3k}}$ contiene como menor a D_{W_k}.

Si $n \geq 8$ entonces todo delta-matroide D_{W_n} contiene como menor a $D_{W_{n-4s}}$, donde $n = 6s + r$.

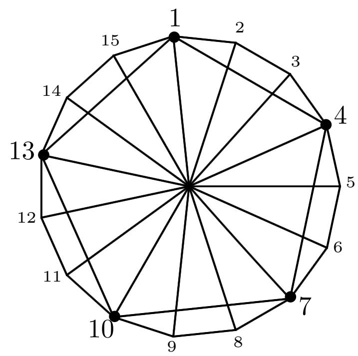
Demostración: La primera afirmación se obtiene aplicando la reducción 1 y la segunda efectuando la reducción R. $\square$

Ejemplo 4.5 *Aplicación de la reducción* 1 *a* W_{15} *para obtener* W_5.

Se muestra D_{W_5} como menor de $D_{W_{15}}$:

$D_{W_5} = (D_{W_{15}}\Delta\{2,3\}\Delta\{5,6\}\Delta\{8,9\}\Delta\{11,12\}\Delta\{14,15\})\setminus\{2\}\setminus\{3\}\setminus \{5\} \setminus \{6\} \setminus \{8\} \setminus \{9\} \setminus \{11\} \setminus \{12\} \setminus \{14\} \setminus \{15\}$.

En la figura 5 puede verse la rueda W_{15} después de haberse realizado las cinco operaciones Δ (de complementación local) sobre las aristas de la forma $(2+3i, 3+3i)$ con $i \in \{0,1,2,3,4\}$. Si se borran las líneas delgadas con sus respectivos vértices se obtiene W_5.



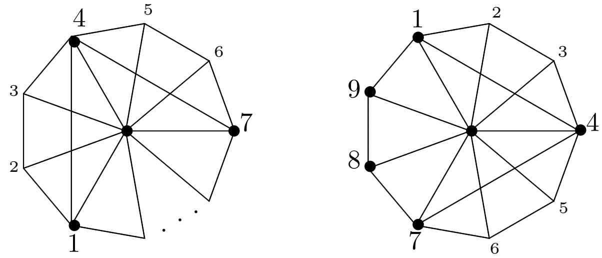
W_5 como menor de W_{15}.
Figura 5.

Ejemplo 4.6 $W5$ *como menor de* $W9$.

Aplicando dos veces la reducción R se obtiene W_5 a partir de W_{21}. Por la proposición 4.4 se sabe que W_{21} puede reducirse a W_9, pues W_{21} tiene tres 6-segmentos más un cuasi 6-segmento de tres aristas. Mediante la reducción R , cada 6-segmento queda con sólo dos aristas, así 3 (2 aristas) + 3 aristas = 9 aristas de W_9. Si se aplica la reducción R a W_9 se obtiene W_5. En la primera figura correspondiente a la figura 6, se muestran las complementaciones locales sobre el primer 6-segmento de una rueda W_n, los rayos en los que los vértices no han sido remarcados se borran a continuación. En la segunda figura, aparece W_5, formada por los vértices remarcados y números más grandes, como reducción de W_9. En términos de menores de D_{W_9} se muestra el delta-matroide D_{W_5}:

$D_{W_5} = (D_{W_9}\Delta\{2,3\}\Delta\{3,4\}\Delta\{5,6\}) \setminus \{2\} \setminus \{3\} \setminus \{5\} \setminus \{6\})$.

Las operaciones se efectúan en el orden que aparecen.



Operaciones sobre un 6-segmento y W_5 como menor de W_9.
Figura 6.

Proposición 4.7 *Sea* $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 8$. *Todo delta-matroide rueda* D_{W_n} *se puede reducir a* D_{W_4}, D_{W_5}, D_{W_6} *o* D_{W_7}, *dependiendo de la clase de* n, *módulo 4. Sean* $n = 4k + j$, $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. *Para* $k \geq 2$, D_{W_n} *se reduce a:*

W_4 *si* $n \equiv 0$ *mod 4,* W_5 *si* $n \equiv 1$ *mod 4,*
W_6 *si* $n \equiv 2$ *mod 4,* *y* W_7 *si* $n \equiv 3$ *mod 4.*

Demostración: Para $n \geq 8$, efectuando una o más veces la reducción R, se obtiene la proposición. □

Proposición 4.8 *Los delta-matroides rueda* $D_{W_{4k}}$, *para* $k \in \mathbf{Z}^+$ *son* $GF(3)$*-representables mediante matrices antisimétricas.*

Demostración: Se cumple la proposición, pues toda rueda W_{4k} con $k \in Z^+$ tiene una orientación compatible. Partiendo de la orientación $Or_1\ Or_1\ Or_2\ Or_2$, esta se repite k veces para W_{4k}:

$Or_1\ Or_1\ Or_2\ Or_2\ \ldots\ Or_1\ Or_1\ Or_2\ Or_2$ (k veces). □

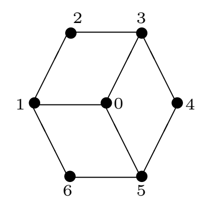
Teorema 4.9 D_{W_5}, D_{W_6} *y* D_{W_7} *son los únicos delta-matroides rueda minimales no representables sobre* $GF(3)$ *con matrices antisimétricas.*

Demostración: Este teorema es un corolario de la proposición 4.8. □

5 Dos familias de delta-matroides no ternarios cuyas gráficas fundamentales son ruedas parciales

Las cuatro proposiciones que siguen se refieren a delta-matroides cuyas gráficas fundamentales son ruedas parciales. En el caso de ruedas parciales alternadas que inducen delta-matroides se tiene una caracterización para ternaridad de dichos delta-matroides. Se halla otra familia de delta-matroides no ternarios que contienen a un delta-matroide no ternario minimal, cuya gráfica fundamental es una rueda parcial con cuatro rayos, tres consecutivos y otro no consecutivo a los anteriores, tal que los vértices del aro que no contienen un rayo incidente, están divididos en dos grupos de cardinalidad impar.

Sea $W_{3,6}$, la rueda parcial alternante con C_6 como aro y el vértice central unido con cada uno de los vértices del aro que tienen una etiqueta impar. $D_{W_{3,6}}$ es su delta-matroide correspondiente. Se tiene el siguiente teorema.



$W_{3,6}$
Figura 7

Teorema 5.1 *$D_{W_{3,6}}$ es un delta-matroide minimal no representable sobre $GF(3)$, mediante matrices antisimétricas.*

Demostración: $D_{W_{3,6}}$ es isomorfo al matroide Fano, denotado como F_7, pues existe X una base de F_7 tal que $D_{W_{3,6}}{=}F_7\Delta\{X\}$. Dado que F_7 es una obstrucción para matroides ternarios , no es posible dar una representación de F_7 sobre $GF(3)$, luego esta propiedad es heredada cuando se considera F_7 como delta-matroide.

Los menores elementales de F_7 son menores elementales de $D_{W_{3,6}}$; es decir, vistos como delta-matroides, son ternarios. □

Respecto al teorema 5.1 y con el etiquetado correspondiente a la figura 7, es interesante observar que no es posible orientar los cuadrados $\{0,1,2,3\}$, $\{0,3,4,5\}$ y $\{0,5,6,1\}$ de $D_{W_{3,6}}$ evitando la orientación μ y manteniendo el aro orientado en una sola dirección. Si se orientan los cuadrados anteriores sin usar la orientación μ, se tiene que:

$$det_2(aro) = 0 \text{ y } det_3(aro) \neq 0.$$

Luego no existe una orientación compatible para $D_{W_{3,6}}$. Cuando se tiene esta configuración de tres cuadrados, dentro de un exágono se dirá que se tiene una *configuración de* 3 *cuadrados sin orientación compatible.*

El caso de los delta-matroides que tienen como gráficas fundamentales a ruedas parciales alternadas $W_{k,2k}$ es interesante, pues estos se dividen en dos grandes clases, dependiendo de la paridad de k. Para k par, $D_{W_{k,2k}}$ es ternario. La orientación de $W_{k,2k}$, con k par, se puede obtener partiendo de la orientación de la rueda W_{2k}, como se explica en la demostración de la proposición 4.8 y después borrando todas las aristas $0v$ donde v es un vértice del aro de W_{2k} con etiqueta par. Los delta-matroides $D_{W_{k,2k}}$ tales que k es impar no son ternarios, pues todos contienen como menor a $D_{W_{3,6}}$, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 5.2 *Sea $k \geq 5$. Todo delta-matroide $D_{W_{k,2k}}$ cuya gráfica fundamental es una rueda parcial alternada, no es ternario, si k es impar.*

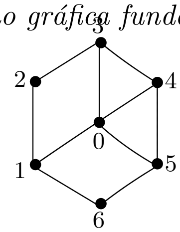
Demostración: $D_{W_{k,2k}}$ no es ternario, pues contiene como menor a $D_{W_{3,6}}$. La afirmación anterior se cumple, pues toda rueda parcial alternada $W_{k,2k}$, numerando sus rayos consecutivamente con las etiquetas impares de 1 a k , sobre el aro y con 0 como etiqueta del centro, se reduce a $W_{(k-2),2(k-2)}$ efectuando las siguientes operaciones:

$(\Delta\{2k, 2k-1\}\Delta\{2k-2, 1\} \setminus \{2k\} \setminus \{2k-1\}) \setminus \{2k-2\} \setminus \{1\}$,

sobre $W_{k,2k}$. $\square$

Toda gráfica que tiene como subgráfica la configuración de 3 cuadrados sin orientación compatible no podrá, tener una orientación compatible. Luego, partiendo como base de la configuración $D_{W_{3,6}}$ y agregando rayos a dicha configuración, se obtienen otras gráficas que inducen delta-matroides que no son representables sobre $GF(3)$ mediante matrices antisimétricas. De esta manera y dada la simetría de la gráfica $D_{W_{3,6}}$ sólo falta analizar dos casos: aumentar un rayo y aumentar dos rayos. Ahora bien, resulta que los delta-matroides inducidos por estas dos gráficas que resultan de los dos casos anteriores, son Δ-equivalentes. Por lo tanto, con este procedimiento se puede hallar una nueva obstrucción para ternaridad de delta-matroides pares. Se estudia este nuevo delta-matroide en la siguiente proposición.

Proposición 5.3 *El delta-matroide $D_{W_{4R}}$=($V_{W_{4R}}, \mathcal{F}_{W_{4R}}$) con $V_{W_{4R}} = \{0, 1, ..., 6\}$ y que tiene como gráfica fundamental a:*



,

es una obstrucción para $GF(3)$-representabilidad.

Demostración: La gráfica fundamental de $D_{W_{4R}}$ no se puede orientar compatiblemente pues contiene la configuración de 3 cuadrados no orientables compatiblemente. Resta ver que sus menores elementales son ternarios. Nótese en primer lugar que $D_{W_{4R}} \setminus (\circ)2 \cong D_{W_{4R}} \setminus (\circ)6$ y $D_{W_{4R}} \setminus (\circ)3 \cong D_{W_{4R}} \setminus (\circ)5$. Esto se tiene por la simetría de la gráfica W_{4R}.

En primer lugar, se analizan las gráficas fundamentales correspondientes a los menores elementales obtenidos por borrado. En el caso de $D_{W_{4R}} \setminus 0$, la gráfica anterior es un exágono, la orientación compatible se dá en el teorema 4.2. La gráfica correspondiente a $D_{W_{4R}} \setminus 4$ consta de dos cuadrados que comparten una arista, la orientación compatible es: $\uparrow \overset{\longrightarrow}{\longleftarrow} \downarrow \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} \uparrow$. El menor $D_{W_{4R}} \setminus 2$ tiene como gráfica fundamental la gráfica descrita en el caso anterior más una diagonal en uno de los cuadrados, esta gráfica se orienta como en el caso anterior, a la diagonal se le dá cualquier orientación, pues esta induce solamente circuitos nuevos con un número impar de aristas. Es importante observar que las aristas colgantes, en una gráfica, no forman parte de ningún circuito, luego se les puede dar cualquier orientación, si el resto de la gráfica tiene una orientación compatible entonces la gráfica completa tendrá una orientación compatible. La gráfica fundamental asociada a $D_{W_{4R}} \setminus 1$ es un cuadrado con una diagonal y dos aristas colgantes, adyacentes a los vértices de grado 2, esta gráfica tiene una orientación compatible, como se muestra en la demostración del teorema 4.2. Por último, el menor $D_{W_{4R}} \setminus 3$ que tiene por gráfica fundamental un cuadrado unido por una arista a un triángulo, más una arista colgante adyacente a un vértice de grado 2 correspondiente al cuadrado, esta gráfica tiene una orientación compatible, dado que el triángulo no induce polígonos con número de aristas de cardinalidad par.

En el caso de los menores elementales obtenidos por contracción, es importante señalar que $D_{W_{4R}} \circ 3 \cong D_{W_{4R}} \setminus 2$, $D_{W_{4R}} \circ 2 \cong D_{W_{4R}} \setminus 3$. Resta verificar las contracciones con los elementos 0, 1 y 4. Para estos elementos se tiene que:

$D_{W_{4R}} \circ 4 \cong D_{W_6} \setminus 6$, pues $(D_{W_{4R}} \circ 4)\Delta\{1,2\}$=$D_{W_6} \setminus 6$,

$D_{W_{4R}} \circ 1 \cong D_{W_6} \circ 0$, pues $(D_{W_{4R}} \circ 1)\Delta\{3,6\}$=$D_{W_6} \circ 0$.

A continuación se muestra la matriz de representación de $D_{W_{4R}} \circ 1$:

	0	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	1	0	0	0	-1
2	-1	0	0	1	1	0
3	0	0	0	-1	0	1
4	0	-1	1	0	-1	1
5	0	-1	0	1	0	0
6	1	0	-1	-1	0	0

.

□

Considérese la siguiente familia de gráficas que son ruedas parciales con 4 rayos. Sean k_1 y k_2 números enteros positivos, considérese $W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}$ con el vértice central etiquetado con 0 y los vértices del aro con el etiquetado acostumbrado. Se toman 3 rayos que tienen uno de sus extremos en los vértices del aro, que tienen etiquetas consecutivas, sin pérdida de generalidad, se pueden considerar los rayos: 01, 02 y 03. Se borran los 3^{k_1} rayos siguientes, se conserva el rayo $0\,3^{k_1}+4$ y se borran los siguientes 3^{k_2} rayos.

Si se consideran los delta-matroides $D_{W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}}$, inducidos por los elementos de la familia de ruedas parciales introducidos anteriormente, se tiene que todo delta-matroide que es un elemento de esta familia contiene como menor a $D_{W_{4R}}$. Para ver que $D_{W_{4R}}$ es un menor de D, para todo $D \in D_{W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}}$, se efectúan operaciones de toma de menores usando técnicas similares a la Reducción 1, explicada anteriormente. Se deja al lector la verificación de este hecho.

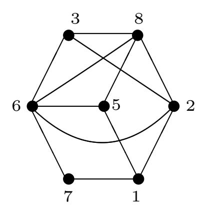
Proposición 5.4 $D_{W_{4R}}$ *es un menor de todo delta-matroide que es un elemento de la familia de delta-matroides* $D_{W_{4,3^{k_1}+3^{k_2}+4}}$. □

Corolario 5.5 D_{W_5}, D_{W_6}, D_{W_7}, $D_{W_{3,6}}$ *y* $D_{W_{4R}}$ *son obstrucciones para* $GF(3)$*-representabilidad de delta-matroides con matrices antisimétricas.* □

D_{W_5}, D_{W_6}, D_{W_7} y $D_{W_{3,6}}$ y $D_{W_{4R}}$ son obstrucciones ternarias en el contexto de delta-matroides inducidos por ruedas y ruedas parciales. Pero dado que no son $GF(3)$-representables con matrices antisimétricas y que todos sus menores son ternarios, entonces los delta-matroides anteriores son obstrucciones ternarias en un contexto general.

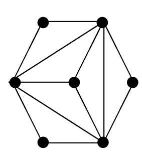
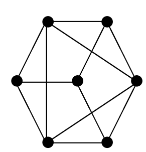
6 Conclusiones

En este trabajo se analizaron los delta-matroides binarios que tienen como gráficas fundamentales a ruedas y ruedas parciales. Si se permite que las gráficas fundamentales correspondientes a ciertos delta-matroides presenten, además de rayos, cuerdas; es decir, aristas que unen dos vértices no adyacentes del aro de una rueda o de una rueda parcial, se pueden obtener nuevos menores prohibidos para $GF(3)$-representabilidad de delta-matroides. Un ejemplo, entre otros que se han obtenido en [20] es el delta-matroide cuya gráfica fundamental aparece en la siguiente figura y que se denotará por D_{3C}:



Nueva obstrucción para ternaridad: D_{3C}.
Figura 8

El conjunto $\mathcal{C}$=$\{D_{W_5}, D_{W_6}, D_{W_7}, D_{W_{3,6}}, D_{W_{4R}}\}$ que se presenta aquí, contiene propiamente a la lista de obstrucciones para gráficas circulares. En [17] Geelen propone una lista de obstrucciones para regularidad de delta-matroides. Dicha lista es $\mathcal{G}$=$\mathcal{C}$ más las dos gráficas que aparecen a continuación:

Esta lista de Geelen $\mathcal{G}$ no es completa, ya que en [20] se exhiben varios delta-matroides nuevos $D = (V, \mathcal{F})$ con $\mid V \mid$=7 que son obstrucciones para ternaridad, uno de ellos es precisamente D_{3C}, mostrado en la figura 8.

La aplicación de las técnicas empleadas en este trabajo, así como de otros análisis y técnicas han permitido extender $\mathcal{C}$ y $\mathcal{G}$. Es decir, la lista de obstrucciones para $GF(3)$-representabilidad de delta-matroides con matrices antisimétricas y por lo tanto para regularidad. Estos nuevos resultados serán reportados en un trabajo posterior [20].

Para finalizar este trabajo y como un breve apéndice se explica la forma de obtener D_{3C}, en el siguiente apartado.

CONSTRUCCION DE D_{3C}.

Considérese la gráfica fundamental de D_{W_9}, etiquetada de la manera usual, correspondiendo 0 al vértice central y las etiquetas del 1 al 9 alrededor del aro, de tal forma que a vértices adyacentes corresponden números consecutivos, siendo el 9 adyacente a 8 y a 1.

$$[(D_{W_9} \circ 0) \setminus 9] \setminus 4 \cong D_{3C}.$$

De hecho, $[(D_{W_9} \circ 0) \setminus 9] \setminus 4 \ \Delta \{5, 8\} = D_{3C}$, si la gráfica fundamental de D_{3C} se considera etiquetada como aparece en la figura 8. Graficamente, para obtener dicha gráfica a partir de W_9, se procede de la manera siguiente: se aplica el operador Δ sobre la arista 09, a la gráfica que se obtiene se la borra el vértice con etiqueta 0, esta operación corresponde a $D_{W_9} \circ 0$. A la gráfica obtenida en el paso anterior se le borran los vértices con etiquetas 9 y 4, esta gráfica es la gráfica fundamental del delta-matroide $[(D_{W_9} \circ 0) \setminus 9] \setminus 4$.

Finalmente, a la última gráfica se le aplica el operador Δ sobre la arista 58 y de esta manera se obtiene la gráfica de la figura 8, la cual es la gráfica fundamental del delta-matroide D_{3C}.

Agradecimientos

El material que presento en este trabajo es parte de mi tesis doctoral. Agradezco al Dr. Isidoro Gitler, quién fué mi asesor, por sus valiosas observaciones durante nuestras discusiones de trabajo. También agradezco a mi colega, el Dr. Isaías López, por su colaboración en el diseño de las figuras que aparecen en este artículo.

M. Guadalupe Rodríguez Sánchez
Departamento de Ciencias Básicas,
UAM - Azcapotzalco,
Av. San Pablo No. 180,
0220 México, D.F., MEXICO.
rsmg@correo.azc.uam.mx

Referencias

[1] Bixby, R. E., *On Reid's characterization of the ternary matroids,* J. Combin., Theory Ser. B, **26** (1979), 174-204.

[2] Bouchet, A., *Greedy algorithm and symmetric matroids,* Math. Programming, **38** (1987), 147-159.

[3] Bouchet, A., *Isotropic systems,* Europen J. Combin., **8** (1987), 231-244.

[4] Bouchet, A., *Unimodularity and circle graphs,* Discrete Math., **66** (1987), 203-208.

[5] Bouchet, A., *Reducing prime graphs and reconizing circle graphs*, Combinatorica, **7** (1987), 243-254.

[6] Bouchet, A., *Representability of* Δ*-matroids*, Colloquia Societatis Janos Bolyai, **52** (1988), 167-182.

[7] Bouchet, A., *Graphic presentations of isotropic systems*, J. Comb. Theory Series B, **45** (1988), 58-76.

[8] Bouchet, A., *Matchings and* Δ*-matroids* Discrete Math., **24** (1989), 55-62.

[9] Bouchet, A.; Duchamp, A., *Representability of* Δ*-matroids over* GF *(2)*, Linear Algebra Appl., **146** (1991), 67-78.

[10] Bouchet, A., *A characterization of unimodular orientations of simple graphs*, J. Comb. Theory Series B, **56** (1992), 45-54.

[11] Bouchet, A., *Circle graph obstructions* J. Combin. Theory Series B, **60** (1994), 107-144.

[12] Bouchet, A., *Multimatroids I. Coverings by independent sets* SIAM J. Discrete Math. 10, **4** (1997), 626-646.

[13] Bouchet, A., *Multimatroids II. Orthogonality, minors and connectivity,* Electron J. Combin. 5, **1** (1998), 8-25.

[14] Bouchet, A., *Multimatroids III. Tightness and fundamental graphs. Combinatorial Geometries,* European J. Combin. 22, **5** (2001), 657-677.

[15] Bouchet, A., *Multimatroids IV. Chain-group representations,* Linear Algebra Appl. 277, no. 1-3 (1998), 271-289.

[16] Brylawski, T. H.; Lucas, D., *Uniquely representable combinatorial geometries,* Teorie Combinatorie (Proc. 1973 Internat. Colloq.) 83-104. Accademia Nazionale dei Lincei, Rome.

[17] Geelen, J. F., Matchings, Matroids and Unimodular Matrices, PhD. thesis, University of Waterloo, 1997.

[18] Geelen, J. F., *A generalization of Tutte's charaterization of totally unimodular matrices*, Submitted.

[19] Gerards, A. M. H., *A short proof of Tutte's characterization of totally unimodular matrices,* Linear Algebra Appl., 114/115 (1989), 207-212.

[20] Gitler, I.; Rodríguez, G., *$GF(3)$-representability of delta-matroids with antisymmetric matrices*, 2001 (To appear).

[21] Harary, F., Graph Theory, Addison Wesley.

[22] Korte, B.; Lovasz, L., *Greedoids, a structural framework for the greedy algorithm*, Progress in Combinatorial Optimization, Proceedings of the Silver Jubilee Conference on Combinatories, Waterloo, 1982, 221-243.

[23] Oxley, J. G., Matroid Theory. Oxford Science Publications, 1992.

[24] Seymour, P. D., *Matroid representation over GF(3)*, J. Combin. Theory Ser. B, **26** (1979), 159-173.

[25] Seymour, P. D., *Descomposition of regular matroids,* J. Combin. Theory Ser. B, **34** (1983), 104-108.

[26] Tutte, W. T., *Lectures on matroids,* J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B, **69** (1965),1-47.

[27] Tutte, W. T., Introduction to the Theory of Matroids, American Elsevier, 1971.

[28] Tutte, W. T., Graph Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[29] Truemper, K., *Alpha-balanced graphs and matrices and $GF(3)$-representability of matroids,* J. Combin. Theory Ser. B, **32** (1982), 112-139.

[30] Truemper, K., Matroid Descomposition, Academic Press, New York, 1992.

[31] Welsh, D. J. A., Matroid Theory. Academic Press, New York, 1976.

[32] Whittle, G., *A characterisation of the matroids representable over $GF(3)$ and the rationals,* Journal of Combinatorial Theory (B), **65** (1995) 222- 261.