

No-inmersión de espacios lente

Enrique Torres Giese ¹

Resumen

Con herramientas básicas como la sucesión espectral de Serre y los cuadrados de Steenrod se obtienen resultados de no-inmersión de espacios lente de dimensión $2n+1$ y torsión 2^m . En la situación $\alpha(n) = 1$, donde $\alpha(n)$ es el número de 1's en la expansión binaria de n , el resultado es óptimo.

2000 Mathematics Subject Classification: 57R42.

Keywords and phrases: Inmersión de variedades, sucesión espectral de Serre, cuadrados de Steenrod.

1 Introducción

Un problema clásico de la Topología Diferencial es el de conocer cuándo una variedad M admite una inmersión de manera óptima en un espacio euclideo, es decir, conocer el mínimo entero k para el cual M admite una inmersión en \mathbb{R}^k . Este es un problema aún abierto, pues el decidir cuándo una variedad M admite una inmersión en una variedad N es en extremo complicado. Una primer contribución en la solución de este problema ocurrió en 1944, cuando Whitney demostró que toda variedad compacta de dimensión n admite una inmersión en un espacio euclideo de dimensión $2n - 1$. En otras palabras, Whitney acotó superiormente la dimensión del espacio euclideo donde la variedad pudiera tener una inmersión de manera óptima. En este trabajo analizaremos el problema de inmersión de espacios lente, de hecho concluiremos un resultado de no inmersión de tales espacios.

¹Becario Conacyt 165576. El contenido de este artículo está basado en la tesis de Maestría presentada por el autor en el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV-IPN.

Si $f : X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ es una inmersión de la variedad X de dimensión n , entonces existe un haz ν_f de dimensión k tal que $\tau_X \oplus \nu_f$ es trivial. El haz ν_f se nombra el *haz normal asociado a la inmersión f* . Cuando X es compacta Hirsch en [7] demostró el recíproco: si existe un haz ν de dimensión k tal que $\tau_X \oplus \nu$ es trivial, entonces existe una inmersión $X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ cuyo haz normal asociado es ν . Observe que en el caso de tener una inmersión $X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, el haz tangente τ_X es el inverso estable del haz normal ν_X .

El trabajo de Hirsch también afirma que entre cualesquiera dos inmersiones de X^n en \mathbb{R}^{2n+1} existe una homotopía $X \times I \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ tal que cada $X \times \{t\} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ es inmersión. Por lo que si $f : X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ y $g : X^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+l}$ son inmersiones, entonces $X^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{n+k} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ y $X^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^{n+l} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ son homotópicas, así $\nu_f \oplus (n - k + 1) = \nu_g \oplus (n - l + 1)$. Es decir, cualesquiera dos haces normales asociados a distintas inmersiones determinan la misma clase estable, llamada el *haz normal estable de X* y denotado por ν_X .

En estos términos, el decidir si una variedad admite una inmersión en codimensión k es equivalente a conocer si la dimensión geométrica de ν_X , denotada por $gd(\nu_X)$, es menor o igual que k , mientras que conocer la dimensión óptima de inmersión es equivalente a conocer exactamente $gd(\nu_X)$. A su vez, el problema de encontrar la dimensión geométrica de un haz α es equivalente al problema de levantamiento

$$\begin{array}{ccc} & & BO(k) \\ & \nearrow & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\alpha} & BO \end{array}$$

La idea clave en la demostración del resultado principal, que a continuación enunciamos, se basa en este último hecho. En nuestro caso supondremos una inmersión, lo cual producirá un levantamiento de la función clasificante del haz normal y algebraicamente se probará su inexistencia.

Escribimos $X \subseteq Y$ si la variedad X admite una inmersión en la variedad Y . Para n y m enteros positivos denotamos por $L^{2n+1}(2^m)$ al espacio de órbitas asociado a la acción usual de $\mathbb{Z}/2^m$ sobre los vectores de norma uno en \mathbb{C}^{n+1} .

Teorema Sea $m \geq 2$ y $l(n) = \max\{1 \leq i \leq n - 1 : \binom{n+i+1}{n} \not\equiv 0 \pmod{4}\}$.

- a) Si $n \neq 2^s + 1$ y $n \geq 2$, entonces $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{2n+1+2l(n)}$.
- b) Si $n = 2^s + 1$, con $s \geq 1$, entonces $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{2n+2l(n)} = \mathbb{R}^{4n-4}$.

Corolario Sea $m \geq 2$

- a) Si $n = 2^s$ con $s \geq 1$, entonces $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-1}$.
- b) Si $n = 2^s + 2^t$ con $s > t \geq 1$, entonces $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-3}$.

En la Subsección 3.2 comparamos estos resultados con situaciones conocidas de inmersión de espacios complejos proyectivos.

2 Preliminares

La *sucesión de Gysin* es una sucesión en cohomología asociada a un haz esférico $S^k \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ orientable. Esta sucesión se obtiene a partir de la sucesión exacta larga de la pareja (D, E) (con $E \hookrightarrow D$ y $D \rightarrow B$ el haz de discos asociado) y el isomorfismo de Thom produciendo

$$\dots \rightarrow H^{r-1}(E) \xrightarrow{\phi} H^{r-k-1}(B) \xrightarrow{e} H^r(B) \xrightarrow{p^*} H^r(E) \rightarrow \dots$$

donde $e \in H^{k+1}(B)$ es la clase de Euler del haz esférico. La condición de que el haz sea orientable puede cubrirse si suponemos que su base sea simplemente conexa.

Lema 2.1 Si en el haz esférico $S^k \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$, B es 1-conexo y su clase de Euler es cero, entonces

$$H^*(E; \mathbb{Z}) \cong H^*(B; \mathbb{Z}) \oplus a \cdot H^*(B; \mathbb{Z})$$

como un $H^*(B; \mathbb{Z})$ -módulo, donde $a \in H^k(E; \mathbb{Z})$ es tal que $\phi(a)$ es un generador de $H^0(B; \mathbb{Z})$.

Demostración: Es importante realizar dos comentarios. Primero, que la forma en que $H^*(E)$ es visto como $H^*(B)$ -módulo es a través de p . Segundo, que el morfismo ϕ es la composición del morfismo de conexión y el isomorfismo de Thom, de modo que ϕ es un morfismo de $H^*(B)$ -módulos. Observe que la sucesión de Gysin toma la forma

$$0 \rightarrow H^q(B) \xrightarrow{p^*} H^q(E) \xrightarrow{\phi} H^{q-k}(B) \rightarrow 0.$$

Sea $a \in H^k(E)$ tal que $\phi(a) = 1 \in H^0(B) \cong \mathbb{Z}$, entonces el morfismo $H^*(B) \rightarrow H^*(E)$ dado por $b \mapsto b \cdot a$ escinde esta última sucesión, obteniendo así el resultado buscado. \square

Por otra parte, en el estudio de haces vectoriales, las clases de Stiefel-Whitney y de Chern juegan un papel esencial. En nuestro estudio manejaremos otros elementos que surgen de la complejificación de haces reales. Estos elementos en cohomología son llamadas las *clases de Pontrjagin*. Estas se definen para haces reales como $p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi^{\mathbb{C}}) \in H^{4i}(X)$ con $n = \dim_{\mathbb{R}}(\xi)$, $i \leq [\frac{n}{2}]$ y $c_j(\xi^{\mathbb{C}})$ la j -ésima clase de Chern de $\xi^{\mathbb{C}}$. En particular, las clases de Pontrjagin del haz universal $\lambda_n \rightarrow BO(n)$ (o de su versión universal $\lambda_n^+ \rightarrow BSO(n)$) se llaman *clases universales de Pontrjagin* y se denotan por p_k . En la Observación 2.2 estaremos de hecho interesados en las clases de λ_{2n}^+ cuya clase de Euler denotaremos por e_n (ver Observación 2.3 (a)).

Observación 2.2 A continuación mencionamos algunas propiedades y relaciones de las clases de Pontrjagin y la clase de Euler.

a) La función

$$U(n) \rightarrow SO(2n)$$

$$A + iB \mapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

induce una función $r_n : BU(n) \rightarrow BSO(2n)$ la cual satisface que $r_n^*(\lambda_{2n}^+) = r(\gamma_n)$. Este hecho junto con los isomorfismos canónicos $\xi^{\mathbb{C}} = \overline{\xi^{\mathbb{C}}}$, $r(\xi^{\mathbb{C}}) = \xi \oplus \overline{\xi}$ y $r(\eta)^{\mathbb{C}} = \eta \oplus \overline{\eta}$ nos permiten obtener las relaciones

$$r_n^*(p_k) = c_k^2 - 2c_{k-1} \cdot c_{k+1} + \dots + (-1)^{k+1} 2c_{2k-1} \cdot c_1 + (-1)^k 2c_{2k}$$

$$r_n^*(e_n) = c_n$$

b) Si ξ es un haz orientable con $\dim(\xi) = n$, entonces $p_n(\xi) = e(\xi)^2$.

Observación 2.3 Algunas observaciones útiles en las siguientes secciones:

a) Tanto $S^{2n-1} \rightarrow BU(n-1) \rightarrow BU(n)$ y $S^{n-1} \rightarrow BSO(n-1) \rightarrow BSO(n)$ son respectivamente los haces esféricos de los haces canónicos $\gamma_n \rightarrow BU(n)$ y $\lambda_n \rightarrow BSO(n)$ [15], lo cual nos permite considerar sus respectivas clases de Chern, Pontrjagin y Euler.

- b) Puesto que la función $BU(n) \xrightarrow{i} BU(m)$ induce al haz universal $\gamma_m \rightarrow BU(m)$ en $\gamma_n \oplus (m - n)$, entonces $i^*c_i(\gamma_m) = c_i(\gamma_n \oplus (m - n)) = c_i(\gamma_n)$ por lo que la función $i^* : H^*(BU(m)) \rightarrow H^*(BU(n))$ es un isomorfismo hasta dimensión $2n$. Similarmente, la función $BSO(n) \xrightarrow{i} BSO(m)$ induce un isomorfismo en cohomología módulo 2 hasta dimensión n .

Lema 2.4 *Si $n - k$ es par, entonces $H^{n-k}(V_{n,k}) \cong \mathbb{Z}$.*

Demostración: Considere la fibración

$$S^{n-k} \xrightarrow{i} V_{n,k} \rightarrow V_{n,k-1}.$$

Puesto que $V_{n,k}$ y $V_{n,k-1}$ son $(n - k - 1)$ y $(n - k)$ conexos respectivamente, podemos aplicar la sucesión exacta de Serre en cohomología. En particular observe que tenemos la siguiente sucesión exacta

$$H^{n-k}(V_{n,k-1}) \rightarrow H^{n-k}(V_{n,k}) \xrightarrow{i^*} H^{n-k}(S^{n-k}) \cong \mathbb{Z}$$

donde $H^{n-k}(V_{n,k-1}) = 0$. Veamos que en el caso $n - k$ par el morfismo i^* es un isomorfismo. Para ello veamos que el morfismo δ de conexión siguiente es trivial. El morfismo δ se encuentra inducido por la diferencial d_{n-k+1} de la sucesión espectral de Serre y está definido como multiplicación por la clase de Euler de la fibración en cuestión. Ahora, considere el siguiente diagrama de fibraciones

$$\begin{array}{ccccc} S^{n-k} & \longrightarrow & V_{n-k+2} & \longrightarrow & S^{n-k+1} \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ S^{n-k} & \xrightarrow{i} & V_{n,k} & \longrightarrow & V_{n,k-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & V_{n,k-2} & \equiv & V_{n,k-2} \end{array}$$

La sucesión espectral de Serre del segundo renglón se mapea en la del primer renglón, de hecho utilizando la sucesión exacta de Serre se verifica que el morfismo $H^{n-k+1}(V_{n,k-1}) \rightarrow H^{n-k+1}(S^{n-k+1})$ es un isomorfismo lo cual, en vista de la naturalidad de la clase de Euler, implica que la clase de Euler buscada es trivial. Así, $H^{n-k}(V_{n,k}) \cong \mathbb{Z}$. \square

Lema 2.5 *Sean $V_{n,k} \xrightarrow{\alpha} BSO(n - k)$ la función clasificante del haz $SO(n - k) \rightarrow SO(n) \rightarrow V_{n,k}$ y $S^{n-k} = V_{n-k+1,1} \xrightarrow{i} V_{n,k}$ la inclusión natural. Si $n - k$ es par, entonces $\alpha^*(e) = \pm 2u$ donde u es un generador de $H^{n-k}(V_{n,k})$ y $e \in BSO(n - k)$ es la clase de Euler.*

Demostración: Considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{n-k-1} & \longrightarrow & V_{n-k+1,2} & \longrightarrow & S^{n-k} \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow i \\
 S^{n-k-1} & \longrightarrow & V_{n,k+1} & \longrightarrow & V_{n,k} \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \alpha \\
 S^{n-k-1} & \longrightarrow & BSO(n-k-1) & \longrightarrow & BSO(n-k) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & BSO(n) & \xlongequal{\quad\quad} & BSO(n)
 \end{array}$$

donde el segundo renglón es el haz esférico canónico sobre $BSO(n-k)$ inducido por α y el primer renglón el haz inducido por i . Observe que el haz $S^{n-k-1} \rightarrow V_{n-k+1,2} \rightarrow S^{n-k}$ es el haz esférico del haz tangente de S^{n-k} el cual, cuando $n-k$ es par, tiene por clase de Euler a $2 \in H^{n-k}(S^{n-k})$. Escribimos a $\alpha^*(e)$ como ku , donde $k \in \mathbb{Z}$ y u es un generador de $H^{n-k}(V_{n,k})$. Como i^* es un isomorfismo en este caso (Lema 2.4) y la clase de Euler es natural, entonces $k = \pm 2$. \square

Finalmente, recordamos que la cohomología de los espacios lente de torsión 2^m está dada por $H^*(L^{2n+1}(2^m); \mathbb{Z}/2) \cong E(x) \otimes P_{n+1}(z)$, con $|x| = 1$ y $|z| = 2$.

3 El espacio clasificante de haces reales establemente complejos

El material de esta sección está basado en el trabajo de B. Junod [9].

3.1 La cohomología de $B(n, k)$

En esta primer subsección estudiaremos las propiedades cohomológicas de un espacio particular que nos permitirá desarrollar nuestro trabajo.

Definición 3.1 Considérese el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & BSO(k) & \\
 & \downarrow & \\
 BU(n) & \longrightarrow & BSO(2n)
 \end{array}$$

Decimos que el pull-back de este sistema es el *espacio clasificante de haces reales de dimensión k establemente complejos sobre complejos celulares de dimensión $\leq 2n + 1$* y lo denotamos por $B(n, k)$. Observe que inductivamente podemos definir el espacio $B(n, k)$ como el pull-back del diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & BSO(k) \\ & & \downarrow \\ B(n, k+1) & \longrightarrow & BSO(k+1) \end{array}$$

Observación 3.2 En la definición anterior se debe cumplir que $1 \leq k \leq 2n$, para el caso en que $k = 2n$ se verifica que $B(n, 2n) = BU(n)$. Por otra parte, si $k = 2n - 1$ y P es el pullback del sistema

$$\begin{array}{ccc} & & SO(2n-1) \\ & & \downarrow \\ U(n) & \longrightarrow & SO(2n) \end{array}$$

donde $U(n) \rightarrow SO(2n)$ está dada por

$$A + iB \mapsto \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

entonces existe una función $U(n-1) \rightarrow P$ inducida por las funciones $U(n-1) \rightarrow U(n)$ y $U(n-1) \rightarrow SO(2n-2) \rightarrow SO(2n-1)$. De hecho, tal situación fuerza a que $U(n-1) \rightarrow P$ sea un isomorfismo. Este argumento muestra que $B(n, 2n-1) = BU(n-1)$.

Trabajaremos frecuentemente con el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} V_{2n, 2n-2j} & \xlongequal{\quad} & V_{2n, 2n-2j} \\ \downarrow i_1 & & \downarrow i_2 \\ B(n, 2j) & \xrightarrow{f_{2j}} & BSO(2j) \\ \downarrow p & & \downarrow \\ BU(n) & \xrightarrow{r_n} & BSO(2n) \end{array}$$

Observe que existe una función $h : BU(j) \rightarrow B(n, 2j)$ determinada por la propiedad universal de $B(n, 2j)$

$$\begin{array}{ccccc}
 BU(j) & & & & \\
 \swarrow & \searrow & \xrightarrow{r_j} & & \\
 & B(n, 2j) & \xrightarrow{f_{2j}} & BSO(2j) & \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 & BU(n) & \xrightarrow{r_n} & BSO(2n) & \\
 \swarrow & & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

h (arrow from $BU(j)$ to $B(n, 2j)$), i (arrow from $BU(j)$ to $BU(n)$), p (arrow from $B(n, 2j)$ to $BU(n)$), r_j (arrow from $BU(j)$ to $BSO(2j)$), f_{2j} (arrow from $B(n, 2j)$ to $BSO(2j)$), r_n (arrow from $BU(n)$ to $BSO(2n)$), i_1^* (arrow from $BU(n)$ to $B(n, 2j)$), i_2^* (arrow from $BSO(2j)$ to $B(n, 2j)$), h^* (arrow from $BSO(2j)$ to $BU(n)$).

Lema 3.3 Para cada $n \geq 1$ y $1 \leq j \leq n - 1$, existe un elemento $a_j \in H^{2j}(B(n, 2j); \mathbb{Z})$ tal que

$$f_{2j}^*(e_j) = p^*(c_j) - 2a_j, \quad i_1^*(a_j) = u_j, \quad h^*(a_j) = 0$$

donde $e_j \in H^{2j}(BSO(2j); \mathbb{Z})$ es la clase universal de Euler y $u_j \in H^{2j}(V_{2n, 2n-2j}; \mathbb{Z})$ es un generador.

Demostración: De acuerdo al Lema 2.5 podemos elegir

$$u_j \in H^{2j}(V_{2n, 2n-2j}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

generador tal que $i_2(e_j) = -2u_j$. Puesto que $V_{2n, 2n-2j}$ es $(2j - 1)$ -conexo, $BU(n)$ es 1-conexo y la cohomología de $BU(n)$ está concentrada en dimensiones pares, aplicando la sucesión exacta larga de Serre a la fibración $V_{2n, 2n-2j} \rightarrow B(n, 2j) \rightarrow BU(n)$ se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow H^{2j}(BU(n)) \rightarrow H^{2j}(B(n, 2j)) \rightarrow H^{2j}(V_{2n, 2n-2j}) \rightarrow 0$$

Sea $x \in H^{2j}(B(n, 2j))$ tal que $i_1^*(x) = u_j$. Puesto que i^* es un isomorfismo hasta dimensión $2j$ podemos reemplazar a x por $a_j = x - p^*(i^*)^{-1}h^*(x)$, así $h^*(a_j) = 0$ y $i_1^*(a_j) = u_j$. Por otra parte, como $H^{2j}(V_{2n, 2n-2j}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, entonces la sucesión exacta anterior se escinde produciendo el isomorfismo

$$H^{2j}(B(n, 2j)) \cong im(p^*) \oplus \mathbb{Z}a_j \cong H^{2j}(BU(n)) \oplus \mathbb{Z}a_j$$

Como $h^*f_{2j}^*(e_j) = r_j^*(e_j) = c_j$, entonces $f_{2j}^*(e_j) = p^*(c_j) + ma_j$. Además, $i_1^*f_{2j}^*(e_j) = i_2^*(e_j) = -2u_j$, así $m = -2$ y $f_{2j}^*(e_j) = p^*(c_j) - 2a_j$. \square

Una situación particular de nuestro diagrama de trabajo es la siguiente

$$\begin{array}{ccc}
 S^{2j-1} & \xlongequal{\quad} & S^{2j-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 B(n, 2j-1) & \xrightarrow{f_{2j-1}} & BSO(2j-1) \\
 p_{2j-1} \downarrow & & \downarrow \\
 B(n, 2j) & \xrightarrow{f_{2j}} & BSO(2j)
 \end{array}$$

Considere la sucesión de Gysin de la fibración

$$S^{2j-1} \rightarrow B(n, 2j-1) \xrightarrow{p_{2j-1}^*} B(n, 2j)$$

la cual tiene clase de Euler (de acuerdo al Lema anterior) $p^*(c_j) - 2a_j$

$$\rightarrow H^q(B(n, 2j)) \xrightarrow{p^*(c_j) - 2a_j} H^{q+2j}(B(n, 2j)) \rightarrow H^{q+2j}(B(n, 2j-1)) \rightarrow$$

y por exactitud se satisface que $p_{2j-1}^* p^*(c_j) = 2p_{2j-1}^*(a_j)$.

Denotaremos por b_j a $p_{2j-1}^*(a_j)$, más generalmente b_j denotará a $p_k^* p_{k+1}^* \cdots p_{2j-1}^*(a_j)$, mientras que c_j al elemento $(p_k^* p_{k+1}^* \cdots p_{2j-1}^*) p^*(c_j)$. Con esta notación se satisface que $2b_j = c_j$ para $1 \leq j \leq n-1$. La siguiente figura muestra tal situación.

$$\begin{array}{ccc}
 B(n, 2j-1) & b_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1}, c_1, \dots, c_{j-1} & 2b_j = c_j \\
 \downarrow & & \\
 B(n, 2j) & a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1}, c_1, \dots, c_j & \\
 \downarrow & & \\
 B(n, 2n-5) & b_{n-2}, b_{n-1}, c_1, \dots, c_{n-3} & 2b_{n-2} = c_{n-2} \\
 \downarrow & & \\
 B(n, 2n-4) & a_{n-2}, b_{n-1}, c_1, \dots, c_{n-2} & \\
 \downarrow & & \\
 B(n, 2n-3) & b_{n-1}, c_1, \dots, c_{n-2} & 2b_{n-1} = c_{n-1} \\
 \downarrow & & \\
 B(n, 2n-2) & a_{n-1}, c_1, \dots, c_{n-1} & \\
 \downarrow & & \\
 B(n, 2n-1) & c_1, \dots, c_{n-1} & \\
 \downarrow & & \\
 BU(n) & c_1, \dots, c_n &
 \end{array}$$

Observación 3.4 Hacemos un par de observaciones útiles en la demostración del siguiente resultado.

- a) De acuerdo al Lema anterior $f_{2k}^*(e_k) = c_k - 2a_k$ en $H^{2k}(B(k+1, 2k))$, y en vista de la Observación 2.2 $(c_k - 2a_k)^2 = f_{2k}^*(e_k^2) = f_{2k}^*(p_k) = p^*r_{k+1}^*(p_k) = p^*(c_k^2 - 2c_{k-1}c_{k+1}) = c_k^2$. Por lo tanto $4c_k a_k = 4a_k^2$ en $H^*(B(k+1, 2k))$.

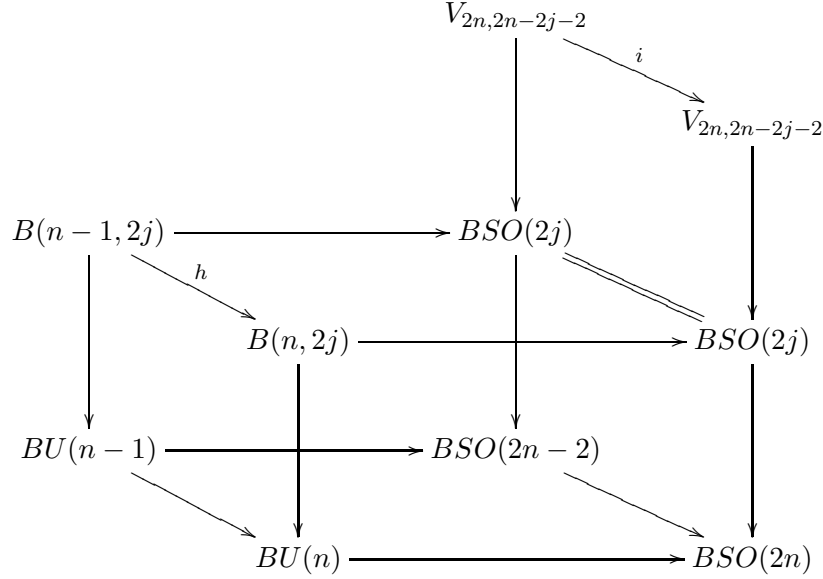
$$\begin{array}{ccc}
 B(k+1, 2k) & & a_k, c_1, \dots, c_k \\
 \downarrow & & \\
 BU(k) = B(k+1, 2k+1) & & c_1, \dots, c_k \\
 \downarrow & & \\
 BU(k+1) & & c_1, \dots, c_{k+1}
 \end{array}$$

- b) Utilizando la fibrición $V_{2n, 2n-k} \rightarrow B(n, k) \rightarrow BU(n)$ y en vista de que $V_{2n, 2n-k}$ y $BU(n)$ son 1-conexo, se tiene que $B(n, k)$ es 1-conexo.
- c) Sea $h : B(n-1, 2j) \rightarrow B(n, 2j)$ la función que define la propiedad universal de $B(n, 2j)$ y que es compatible con la misma función h del diagrama previo al Lema 3.3. En esta situación se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 B(n-1, 2j) & \xrightarrow{h} & B(n, 2j) & \longrightarrow & BSO(2j) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B(n-1, 2n-3) & \longrightarrow & B(n, 2n-3) & \longrightarrow & BSO(2n-3) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 BU(n-1) & \longrightarrow & B(n, 2n-2) & \longrightarrow & BSO(2n-2) \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 BU(n-1) & \xlongequal{\quad} & B(n, 2n-1) & \longrightarrow & BSO(2n-1) \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 BU(n-1) & \longrightarrow & BU(n) & \longrightarrow & BSO(2n)
 \end{array}$$

el cual nos muestra que $\langle b_{n-1} \rangle \subseteq \text{Ker}(h^*)$ ya que $h^*(a_{n-1}) = 0$ (Lema 3.3).

- d) En el Lema 3.3 construimos elementos $a_j \in H^{2j}(B(n, 2j))$, nótese que estos elementos en principio dependen de n , para ser precisos a_j debería denotarse como a_j^n . Veamos que h preserva tales elementos, es decir $h(a_j^n) = a_j^{n-1}$. Para esto considere el siguiente diagrama conmutativo



donde la función i es la inclusión canónica que es parte de la fibración $V_{2n, 2n-2j-2} \xrightarrow{i} V_{2n, 2n-2j} \rightarrow V_{2n, 2}$. Utilizando la sucesión exacta de Serre se tiene que i^* es un isomorfismo en dimensión $2j$, lo cual implica que $h^*(a_j)$ al restringirlo en su correspondiente variedad de Stiefel es un generador, en particular $h^*(a_j)$ y a_j son libres de torsión. La observación es consecuencia de la conmutatividad del diagrama, del hecho de que $h^*(a_j)$ y a_j son libres de torsión y de la relaciones del Lema 3.3 que definen dichos elementos. En adelante usaremos indistintamente la notación a_j para referirnos a los elementos del Lema 3.3 sin importar n .

Teorema 3.5 $H^*(B(n, k); \mathbb{Z})$ es un \mathbb{Z} -módulo libre determinado por el isomorfismo

$$H^*(B(n, k); \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_t] \otimes \Delta(a_t, b_{t+1}, \dots, b_{n-1}) & k = 2t \\ \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_t] \otimes \Delta(b_{t+1}, \dots, b_{n-1}) & k = 2t + 1 \end{cases}$$

donde $\Delta(x_1, \dots, x_m)$ es el grupo abeliano libre generado por los elementos

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_s}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leq m.$$

Demostración: Procederemos por inducción decreciente sobre k . Los casos en que k es $2n$ ó $2n-1$ son inmediatos pues $H^*(B(n, k))$ es en estos casos, de acuerdo a la Observación 3.2, $H^*(BU(n))$ y $H^*(BU(n-1))$ respectivamente. Analicemos ahora el caso $k = 2n-2$ y para éello la sucesión de Gysin de la fibración

$$S^{2n-2} \rightarrow B(n, 2n-2) \xrightarrow{p_{2n-2}^*} B(n, 2n-1)$$

que es

$$0 \rightarrow H^{2q}(BU(n-1)) \xrightarrow{p_{2n-2}^*} H^{2q}(B(n, 2n-2)) \xrightarrow{\phi} H^{2q-2n+2}(BU(n-1)) \rightarrow 0$$

pues su clase de Euler es trivial al ser de grado impar en $BU(n-1)$. Así, de acuerdo al Lema 2.1, tenemos el isomorfismo

$$H^*(B(n, 2n-2)) \cong H^*(BU(n-1)) \oplus a \cdot H^*(BU(n-1))$$

para $a \in H^{2n-2}(B(n, 2n-2))$ tal que $\phi(a)$ es generador de $H^0(BU(n-1))$. Por otra parte, aplicando la sucesión exacta de Serre a la fibración $V_{2n,2} \rightarrow B(n, 2n-2) \xrightarrow{p} BU(n)$ se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow H^{2n-2}(BU(n)) \xrightarrow{p^*} H^{2n-2}(B(n, 2n-2)) \rightarrow H^{2n-2}(V_{2n,2}) \rightarrow 0$$

la cual produce el isomorfismo $H^{2n-2}(B(n, 2n-2)) \cong \text{Im}(p^*) \oplus \mathbb{Z}a_{n-1}$ ya que $H^{2n-2}(V_{2n,2}) \cong \mathbb{Z}$ (Lema 2.4). Como $\text{Im}(p^*) = \text{Im}(p_{2n-2}^*) = \ker(\phi)$, entonces $\phi(a_{n-1})$ es generador de $H^0(BU(n-1))$, lo cual describe el isomorfismo deseado. Observe que en este caso, de acuerdo a la Observación 3.4, $a_{n-1}^2 = c_{n-1}a_{n-1}$.

Supongamos ahora el resultado cierto para k con $r \leq k \leq 2n-1$ y probémoslo para $r-1$.

Si r es impar, digamos $r = 2j+1$, en este caso procedemos como arriba. Aplicamos la sucesión de Gysin a la fibración $S^{2j} \rightarrow B(n, 2j) \rightarrow B(n, 2j+1)$, la cual tiene clase Euler trivial, para concluir el isomorfismo

$$\begin{aligned} H^*(B(n, 2j)) &\cong H^*(B(n, 2j+1)) \oplus a_j H^*(B(n, 2j+1)) \\ &\cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_j] \otimes \Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1}) \end{aligned}$$

Para efectos de la demostración del siguiente caso, en que r es par, demostraremos que el morfismo de grupos

$$\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_{j-1}, c_j - 2a_j] \otimes \Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1}) \xrightarrow{\psi_n} H^*(B(n, 2j))$$

$$x \otimes y \mapsto xy$$

es un isomorfismo. Procedemos por inducción sobre n y para éllo comenzamos en $n = j + 1$ que es el primer valor que puede tomar n . El morfismo en consideración toma la forma

$$\mathbb{Z}[c_1, \dots, c_{j-1}, c_j - 2a_j] \otimes \Delta(a_j) \xrightarrow{\psi_{j+1}} \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_j] \otimes \Delta(a_j)$$

y en vista de que $a_j^2 = a_j c_j$ las relaciones $(c_j - 2a_j) \otimes 1 + 2(1 \otimes a_j) \mapsto c_j$ y $(c_j - 2a_j)^2 \otimes 1 \mapsto c_j^2$ muestran que ψ_{j+1} es suprayectiva y en consecuencia un isomorfismo entre \mathbb{Z} -módulos libres. Supongamos que la afirmación es cierta para valores menores que n y sean $A = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_j] \otimes \Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-2})$, $B = \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_{j-1}, c_j - 2a_j] \otimes \Delta(a_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-2})$, $\{x_i\}$ base de A (por lo que $\{xb_{n-1}\}$ es base de Ab_{n-1}) y $h : B(n-1, 2j) \rightarrow B(n, 2j)$ la función de la Observación 3.4. Observe por una parte que $\text{Ker}(h^*) = Ab_{n-1}$ y que $H^*(B(n, 2j)) \cong A \oplus Ab_{n-1}$. Así, la hipótesis de inducción y la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ \psi_n|_B \swarrow & \downarrow \psi_{n-1} & \\ A \oplus Ab_{n-1} & \xrightarrow{h^*} & A \end{array}$$

muestran que $\psi_n|_B$ es monomorfismo, y de hecho podemos elegir $\{y_i\}$ base de B de tal suerte que $\psi_n(y_i) = x_i + z_i b_{n-1}$ para $z_i \in A$. Puesto que $a_{n-1}^2 = c_{n-1} a_{n-1}$ y $2b_{n-1} = c_{n-1}$, se cumple que $b_{n-1}^2 = 0$ en $H^*(B(n, 2j))$. Por lo tanto $\psi_n|_{Bb_{n-1}}$ es biyectiva y su imagen está en Ab_{n-1} . Así, ψ_n es isomorfismo.

Si r es par, digamos $r = 2j$, entonces de acuerdo al Lema 3.3 la clase de Euler de la fibración $S^{2j-1} \rightarrow B(n, 2j-1) \rightarrow B(n, 2j)$ es $c_j - 2a_j$ y en vista de que ψ_n es inyectiva, se cumple que el morfismo de multiplicación por la clase de Euler es inyectivo, luego el morfismo ϕ de la sucesión de Gysin de la fibración $S^{2j-1} \rightarrow B(n, 2j-1) \rightarrow B(n, 2j)$ es trivial lo cual produce los isomorfismos de grupos

$$\begin{aligned} H^*(B(n, 2j-1)) &\cong H^*(B(n, 2j)) / \langle c_j - 2a_j \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_{j-1}] \otimes \Delta(b_j, b_{j+1}, \dots, b_{n-1}). \quad \square \end{aligned}$$

Lema 3.6 Para cada $n \geq 1$ y $1 \leq j \leq n-1$, el elemento $a_j \in H^{2j}(B(n, 2j); \mathbb{Z})$ satisface

$$a_j^2 = a_j c_j + (-1)^j \sum_{r=j+1}^{\min(2j, n-1)} (-1)^r b_r c_{2j-r}.$$

Demostración: Recordemos que la clase de Euler $e_j \in H^{2j}(BSO(2j))$ satisface la relación

$$e_j^2 = p_j$$

y que

$$r_n^*(p_j) = c_j^2 + (-1)^j \sum_{r=j+1}^{\min(2j, n)} (-1)^r 2c_r c_{2j-r}$$

en $H^{4j}(BU(n))$ (Observación 2.2). Así,

$$f_{2j}^*(e_j^2) = c_j^2 - 4a_j c_j + 4a_j^2$$

y

$$\begin{aligned} r_n^*(p_j) &= c_j^2 + (-1)^j \sum_{r=j+1}^{\min(2j, n-1)} (-1)^r 2c_r c_{2j-r} \\ &= c_j^2 + (-1)^j \sum_{r=j+1}^{\min(2j, n-1)} (-1)^r 4b_r c_{2j-r}. \end{aligned}$$

El resultado es ya inmediato pues $H^*(B(n, 2j))$ es libre de torsión. \square

Observación 3.7 De nuevo hacemos tres observaciones útiles para la demostración del siguiente resultado.

- La función h^* de la Observación 3.4 define un isomorfismo hasta dimensión $2n-3$. (o $< 2(n-1)$).
- Considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} B(n, 2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty & \xrightarrow{f_{2j-2 \times 1}} & BSO(2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ & & B(n+1, 2j) \xrightarrow{f_{2j}} BSO(2j) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ BU(n) \times \mathbb{C}P^\infty & \longrightarrow & BU(n+1) & \longrightarrow & BSO(2n+2) \end{array}$$

donde el resto de las funciones son canónicas. En esta situación el cuadro externo es homotópicamente conmutativo y en vista de que $BSO(2j) \rightarrow BSO(2n+2)$ es una fibración podemos sustituir la función $B(n, 2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow BSO(2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow BSO(2j)$ por una que haga tal cuadro estrictamente conmutativo. De esta manera existe una función f de tal suerte que los cuadros

$$\begin{array}{ccc} B(n, 2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty & \longrightarrow & BSO(2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty \\ f \downarrow & & \downarrow \\ B(n+1, 2j) & \longrightarrow & BSO(2j) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} B(n, 2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty & \xrightarrow{f} & B(n+1, 2j) \\ \downarrow & & \downarrow \\ BU(n) \times \mathbb{C}P^\infty & \longrightarrow & BU(n+1) \end{array}$$

sean (homotópicamente) conmutativos.

Analizaremos cuál es el efecto de f^* sobre $H^*(B(n+1, 2j))$. Observe que la función $BU(n) \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow BU(n+1)$ muestra que

$$\begin{aligned} c(\gamma_n \times \gamma_1) &= c(\pi_n^*(\gamma_n) \oplus \pi_1^*(\gamma_1)) \\ &= c(\pi_n^*(\gamma_n))c(\pi_1^*(\gamma_1)) \\ &= (c(\gamma_n) \otimes 1) \cdot (1 \otimes c(\gamma_1)) \\ &= c(\gamma_n) \otimes c(\gamma_1) \end{aligned}$$

donde $\pi_n : BU(n) \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow BU(n)$ y $\pi_1 : BU(n) \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ son las proyecciones canónicas, así $f^*(c_i) = c_i + c_{i-1}z$ en $H^*(B(n, 2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty) \cong H^*(B(n, 2j-2)) \otimes H^*(\mathbb{C}P^\infty)$, donde z es el generador de $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ y $1 \leq i \leq j$.

Recordemos que $c_j = 2b_j$ en $B(n, 2j-2)$. Ahora, puesto que $f_{e_j}^*(a_j) = c_j - 2a_j$ y la función $BSO(2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow BSO(2j)$ envía $e(\lambda_{2j})$ en $(e(\lambda_{2j-2}) \otimes 1) \cdot (1 \otimes z)$, se tiene que $2f^*(a_j) = c_j + 2a_{j-1}$ y en consecuencia $f^*(a_j) = b_j + a_{j-1}z$ (pues $H^*(B(n, 2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty)$ es libre de torsión).

Por otra parte, la función $B(n, 2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow B(n+1, 2j) \rightarrow B(n+1, 2i)$ se factoriza $B(n, 2j-2) \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow B(n, 2i-2) \times \mathbb{C}P^\infty \rightarrow B(n+1, 2i)$ donde la última función de esta composición es una versión de f para $j = i$. Utilizando este hecho tenemos que

$f^*(b_i) = b_i + b_{i-1}z$ para $j+1 \leq i \leq n-1$ y que $f^*(b_n) = b_{n-1}z$ pues $b_n = 0$ en $H^*(B(n, 2n-2))$ de acuerdo a la Observación 3.4.

- c) Sea $G = \mathbb{Z}/2[c_1, \dots, c_{j-1}] \otimes (\mathbb{Z}/2 \langle a_j \rangle \oplus \mathbb{Z}/2 \langle b_{j+1} \rangle \cdots \oplus \mathbb{Z}/2 \langle b_n \rangle) \hookrightarrow H^*(B(n+1), 2j; \mathbb{Z}/2)$ y observe que la restricción de f^* a G es inyectiva.

Teorema 3.8 *Para cada $n \geq 1$, $1 \leq j \leq n-1$ y cada $0 \leq k \leq j$ se tiene la siguiente relación en $H^*(B(n, 2j); \mathbb{Z}/2)$*

$$Sq^{2k}(a_j) = \sum_{r=\max(0, k+j+1-n)}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{k+j-r} c_r + a_j c_k.$$

Demostración: Procederemos por inducción sobre n . El caso en que $n = 1$ se verifica trivialmente, mientras que para $n = 2$ se tiene que $j = 1$ y $k = 0, 1$. Pero $Sq^2(a_1) = a_1^2 = a_1 c_1$ lo cual coincide con nuestra relación.

Suponga cierto el resultado para valores menores que $n+1$. Para $a_j \in H^{2j}(B(n+1, 2j))$ se cumple que $Sq^{2k}(a_j) \in H^{2(k+j)}(B(n+1, 2j))$, así de acuerdo al isomorfismo de la Observación 3.7 nuestra relación es válida para $k+j \leq n-1$. Para $k+j \geq n$ consideraremos la situación de la Observación 3.7. Primero analicemos el caso en que $j > 1$, $k < j$ y $k+j \geq n$, de acuerdo a nuestra hipótesis de inducción se tiene que

$$\begin{aligned} h^* Sq^{2k}(a_j) &= Sq^{2k}(h^*(a_j)) \\ &= Sq^{2k}(a_j) \\ &= \sum_{r=k+j+1-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} c_r + a_j c_k \end{aligned}$$

y puesto que $\ker(h^*) = b_n H^*(B(n, 2j))$ tenemos

$$Sq^{2k}(a_j) = \sum_{r=k+j+1-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} c_r + a_j c_k + b_n p(c_1, \dots, c_{j+k-n})$$

donde $p \in \mathbb{Z}/2[c_1, \dots, c_{j-1}]$. Luego, $Sq^{2k}(a_j) \in G$ y

$$\begin{aligned} f^* Sq^{2k}(a_j) &= Sq^{2k}(f^*(a_j)) \\ &= Sq^{2k}(b_j + a_{j-1}z) \\ &= Sq^{2k}(b_j) + Sq^{2k}(a_{j-1})z + Sq^{2k-2}(a_{j-1})z^2. \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la hipótesis de inducción, vemos que $f^*Sq^{2k}(a_j)$ está dado por

$$\begin{aligned} & \sum_{r=k+j+1-n}^k \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} c_r + \sum_{r=k+j-n}^{k-1} \binom{j-r-1}{k-r} b_{j+k-r-1} c_r z \\ & + \sum_{r=\max(0, k+j-n-1)}^{k-2} \binom{j-r-1}{k-r-1} b_{j+k-r-2} c_r z^2 + (a_{j-1} c_k z + a_{j-1} c_{k-1} z^2) \end{aligned}$$

y como $\binom{j-r-1}{k-r} \equiv \binom{j-r-1}{k-r-1} + \binom{j-r}{k-r}$ (2), $f^*Sq^{2k}(a_j)$ ahora es

$$\begin{aligned} & \sum_{r=k+j+1-n}^k \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} (c_r + c_{r-1} z) + \sum_{r=k+j-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r-1} c_r z \\ & + \sum_{r=\max\{1, k+j-n\}}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r-1} c_{r-1} z^2 + a_{j-1} z (c_k + c_{k-1} z) \end{aligned}$$

Si $k+j > n$, se tiene

$$\begin{aligned} f^*Sq^{2k}(a_j) &= \sum_{r=k+j+1-n}^k \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r} (c_r + c_{r-1} z) \\ &+ \sum_{r=k+j-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{j+k-r-1} z (c_r + c_{r-1} z) + a_{j-1} z (c_k + c_{k-1} z) \\ &= \sum_{r=k+j+1-n}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} (b_{j+k-r} + b_{k+j-r-1} z) (c_r + c_{r-1} z) \\ &+ (b_j + a_{j-1} z) (c_k + c_{k-1} z) + \binom{n-k}{n-j} b_{n-1} z (c_{j+k-n} + c_{j+k-n-1} z) \\ &= f^* \left(\sum_{r=\max(0, k+j-n)}^{k-1} \binom{j-r}{k-r} b_{k+j-r} c_r + a_j c_k \right) \end{aligned}$$

que es nuestro resultado ya que $f^*|_G$ es inyectiva. Si $k+j = n$, procedemos de manera análoga como arriba. Restan dos casos, el primero para $j = 1$ y el segundo para $j = k$. En el primer caso la relación deseada se verifica fácilmente, mientras que el segundo es consecuencia del Lema 3.6 y que $Sq^{2j}(a_j) = a_j^2$. \square

3.2 El problema de inmersión

A continuación mencionamos cómo un sistema de Moore-Postnikov está relacionado con el problema de levantamiento.

Proposición 3.9 *Sea $g : W \rightarrow Y$ con W un CW -complejo finito. Si $\{Z_n, \alpha_n, \beta_n\}$ es un sistema de Moore-Postnikov de $F \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$, entonces una condición suficiente para que g levante a través de f es que $H^*(W, \pi_{*-1}(F)) = 0$.*

Una aplicación de este resultado la podemos hacer al siguiente problema. Cada haz vectorial complejo estable se clasifica a través de una función $X \rightarrow BU$. Si X es un CW complejo finito, digamos de dimensión N , la pregunta es si podemos levantar la función de clasificación a algún $BU(n)$ y si es el caso cómo depende n de N . Nótese que un tal levantamiento siempre es posible para n suficientemente grande pues X es compacto y BU está dotado con la topología unión de los $BU(n)$.

Puesto que la fibra W de $BU(n) \rightarrow BU$ es $\cup_{k \geq 0} W_{n+k, k}$ y cada $W_{n+k, k}$ es $2n$ -conexo, se tiene que W es $2n$ -conexo. Así, para $q \leq 2n + 1$ tenemos $H^q(X, \pi_{q-1}(W)) = 0$, y si suponemos que $n \geq \frac{1}{2}(N - 1)$ entonces $H^q(X, \pi_{q-1}(W)) = 0$ para $q \geq 2n + 2$, por lo que tendremos un levantamiento a $BU(n)$.

Un razonamiento análogo al anterior muestra que si X es un CW -complejo de dimensión N y existe un haz complejo ξ sobre X con función clasificante $X \rightarrow BU(M)$ y $M > N$, entonces la función clasificante de ξ levanta a $BU(n)$, para $2n + 1 \geq N$, produciendo un isomorfismo $\xi = \eta \oplus (M - n)$ para η un haz complejo sobre X .

En particular, cualquier haz complejo estable sobre $L^{2n+1}(2^m)$ se clasifica por una función $L^{2n+1}(2^m) \rightarrow BU(n)$. El trabajo de esta sección puede ser interpretado como un método para detectar obstrucciones no triviales para levantar levantar haces $L^{2n+1}(2^m) \rightarrow BU(n)$ a algún $BU(m)$ con $m < n$.

Enunciamos de nuevo el resultado principal de este trabajo.

Teorema 3.10 *Sea $m \geq 2$ y $l(n) = \max\{1 \leq i \leq n - 1 : \binom{n+i+1}{n} \not\equiv 0 \pmod{4}\}$.*

a) *Si $n \neq 2^s + 1$ y $n \geq 2$, entonces $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{2n+1+2l(n)}$.*

- b) Si $n = 2^s + 1$, con $s \geq 1$, entonces $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{2n+2l(n)} = \mathbb{R}^{4n-4}$.

Corolario 3.11 Sea $m \geq 2$

- a) Si $n = 2^s$ con $s \geq 1$, entonces $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-1}$.
- b) Si $n = 2^s + 2^t$ con $s > t \geq 1$, entonces $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-3}$.

En la demostración de este teorema utilizaremos los isomorfismos canónicos $\tau_{\mathbb{C}P^n} \oplus 1_{\mathbb{C}} = (n+1)\gamma_n$ y $\tau_{L^{2n+1}(2^m)} \oplus 1_{\mathbb{R}} = (n+1)\sigma$, donde $\sigma = q^*(r(\gamma_n))$ y $q : L^{2n+1}(2^m) \rightarrow \mathbb{C}P^n$ la proyección canónica. Observe que estos isomorfismos muestran que si $gd(\nu_{\mathbb{C}P^n}) = M$, entonces $gd(\nu_{L^{2n+1}(2^m)}) \leq M$. Esto último quiere decir que si $\mathbb{C}P^n \subseteq \mathbb{R}^{2n+k}$, entonces $L^{2n+1}(2^m) \subseteq \mathbb{R}^{2n+1+k}$. Por otra parte, Milgram probó en [11] que $\mathbb{C}P^n \subseteq \mathbb{R}^{4n-\alpha(n)+1}$ y que $\mathbb{C}P^n \subseteq \mathbb{R}^{4n-\alpha(n)}$ si n es impar o si $\alpha(n) = 1$. Así, cuando $\alpha(n) = 1$ tenemos que $L^{2n+1}(2^m) \subseteq \mathbb{R}^{4n}$ lo cual implica que en este caso nuestro resultado es óptimo.

Por otra parte, en [13] Sanderson y Schwarzenberger demostraron que $\mathbb{C}P^n \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-2\alpha(n)-1}$ y que $\mathbb{C}P^n \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-2\alpha(n)+\epsilon}$ si $\alpha(n) = 1$ o si n es par con $\alpha(n) \not\equiv 0 \pmod{4}$, donde $\epsilon = 0$ si $\alpha(n) \equiv 1 \pmod{4}$, y $\epsilon = 1$ si $\alpha(n) \equiv 2, 3 \pmod{4}$.

Algunos casos del trabajo de Sanderson-Schwarzenberger pueden obtenerse (o compararse a partir de cierto punto) con el Teorema 3.10, por ejemplo:

- a) Si $\alpha(n) = 1$, de acuerdo a nuestro resultado $\mathbb{C}P^n \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-2}$ el cual es óptimo en vista de la inmersión de Milgram y coincide con la no-inmersión de Sanderson-Schwarzenberger.
- b) Para $n = 2^s + 1$ nuestro resultado afirma que $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-4}$ y en consecuencia $\mathbb{C}P^n \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-5}$ que coincide también con el resultado de Sanderson-Schwarzenberger.
- c) Para $n = 2^r + 2^s$ nuestro resultado afirma que $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-3}$ y en consecuencia $\mathbb{C}P^n \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-4}$ mientras que el resultado de Sanderson-Schwarzenberger afirma que $\mathbb{C}P^n \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-3}$.
- d) Para $n = 2^r + 2^s + 1$ nuestro resultado afirma que $L^{2n+1}(2^m) \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-7}$ y en consecuencia $\mathbb{C}P^n \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-8}$ mientras que el resultado de Sanderson-Schwarzenberger afirma que $\mathbb{C}P^n \not\subseteq \mathbb{R}^{4n-7}$.

Finalmente, Davis y Mahowald [1] demostraron que para $\alpha(n) = 2$ y n impar $\mathbb{C}P^n \subseteq \mathbb{R}^{4n-3}$ y si n es par $\mathbb{C}P^n \subseteq \mathbb{R}^{4n-2}$. Por lo que en la situación $\alpha(n) = 2$ nuestro resultado de no-inmersión dista a lo más en una unidad de la situación óptima.

Observación 3.12 Haremos a continuación algunas observaciones sobre $l(n)$. Denotamos por $\nu(n)$ al exponente de 2 en n . Usaremos las identidades $\nu\binom{a}{b} = \alpha(b) + \alpha(a-b) - \alpha(a)$ y $\alpha(a-1) = \alpha(a) - 1 + \nu(a)$.

- a) Como $\nu\binom{2n}{n} = \alpha(n)$, entonces $l(n) = n - 1$ para $\alpha(n) = 1$.
- b) Como $\nu\binom{2n-1}{n} = \alpha(n) - 1$, entonces $l(n) = n - 2$ para $\alpha(n) = 2$.
- c) Como $\nu\binom{2n-2}{n} = \alpha(n-2) + 1 - \nu(n)$, entonces $l(n) < n - 3$ para n impar y $\alpha(n) \geq 3$.

Lema 3.13 Si $n = 2^{s_1} + \dots + 2^{s_k}$ con $s_1 > \dots > s_k \geq 0$ y $k \geq 3$, entonces

$$l(n) = 2^{s_1} + 2^{s_2} - 2 - 2^{s_3} - \dots - 2^{s_k}.$$

Demostración: Usaremos el hecho bien conocido de que $\nu\binom{a}{b}$ es el número de acarreo que ocurren al realizar la resta de las expresiones binarias de a y b . Sea $r = 2^{s_1} + 2^{s_2} - 2 - 2^{s_3} - \dots - 2^{s_k}$. Entonces $n+r+1 = 2^{s_1+1} + 2^{s_2+1} - 1$, por lo que el máximo número de acarreo en la resta de $n+r+1$ y n es precisamente uno, en la posición s_1 , como se muestra en la figura (ya sea que $s_1 = s_2 + 1$ o $s_1 > s_2 + 1$)

$$\begin{array}{cccccc} s_1 + 1 & s_1 & \cdots & s_2 + 1 & s_2 & \cdots & s_k \\ 1 & 0 & & 0 & 1 & & 1 & n+r+1 \\ & 1 & & 0 & 1 & & 1 & n \end{array}$$

Por lo que $r \leq l(n)$. Veamos que r es de hecho $l(n)$. Analicemos, para ejemplificar, la diferencia $(n+r+2) - n$. En este caso $(n+r+2) - n = 2^{s_1+1} + 2^{s_2+1} + 1$ y en tal situación la figura

$$\begin{array}{cccccc} s_1 + 1 & s_1 & \cdots & s_2 + 1 & s_2 & \cdots & s_k \\ 1 & 0 & & 1 & 0 & & 0 & n+r+2 \\ & 1 & & 0 & 1 & & 1 & n \end{array}$$

muestra que hay un acarreo en la posición s_k y otro, en el peor de los casos, en s_2 . Consideremos en adelante la diferencia $(n+r+k+1) - n =$

$r + k + 1$ para $k \geq 1$ la cual, de acuerdo a nuestra definición de $l(n)$, debe ser a lo mas n .

Supongamos que $s_1 = s_2 + 1$ y no existen acarrees en $(n+r+k+1) - n$, entonces $(n+r+k+1) - n \geq 2^{s_1+1} > n$ que es una contradicción. De existir sólo un acarreo tal situación forza a que $n+r+k+1$ tenga 1 en la posición s_2 (de lo contrario habría dos o más acarrees)

$$\begin{array}{cccccc} s_1 + 1 & s_1 & s_2 & \cdots & s_k & \\ 1 & 1 & 1 & & & n+r+k+1 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 & n \end{array}$$

así $(n+r+k+1) - n \geq 2^{s_1+1} > n$.

Supongamos que $s_1 > s_2 + 1$, entonces existe un acarreo en $(n+r+k+1) - n$ en la posición s_1

$$\begin{array}{cccccc} s_1 + 1 & s_1 & \cdots & s_2 + 1 & s_2 & \cdots & s_k & \\ 1 & 0 & & 1 & & & & n+r+k+1 \\ & 1 & & 0 & 1 & & 1 & n \end{array}$$

y de no existir más acarrees $(n+r+k+1) - n \geq 2^{s_1} + 2^{s_2+1} > n$. Por lo tanto $l(n) = r$. \square

Esta descripción de $l(n)$ para $\alpha(n) \geq 3$ nos dice que

$$l(n) \equiv \begin{cases} 2 \ (4) & \text{si } n \equiv 0 \ (4) \\ 1 \ (4) & \text{si } n \equiv 1 \ (4) \\ 0 \ (4) & \text{si } n \equiv 2 \ (4) \\ 3 \ (4) & \text{si } n \equiv 3 \ (4) \end{cases}$$

Demostración del Teorema 3.10

Puesto que $\tau_{L^{2n+1}(2^m)} \oplus 1 = (n+1)\sigma$, $L^{2n+1}(2^m) \subseteq \mathbb{R}^{2n+1+k}$ si y sólo si, se tiene un levantamiento

$$\begin{array}{ccc} & & BSO(k) \\ & \nearrow & \downarrow \\ -(n+1)\sigma : L^{2n+1}(2^m) & \longrightarrow & BSO \end{array}$$

Al inicio de esta sección se discutió la existencia de un levantamiento g de $-(n+1)(\gamma)$ a $BU(n+1)$, de modo que se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} & B(n+1, k) & \longrightarrow BSO(k) \\ & \nearrow \bar{f}_k & \downarrow p \\ L^{2n+1}(2^m) & \xrightarrow{g} BU(n+1) & \longrightarrow BSO(2n+2) \end{array}$$

Observe que $g^*(c_i) = c_i(-(n+1)\gamma) = \binom{-n-1}{i} z^i = (-1)^i \binom{n+i}{n} z^i$ pues $c(-(n+1)\gamma) = c(\gamma)^{-n-1} = (1+z)^{-n-1} = \sum_{i \geq 0} \binom{-n-1}{i} z^i$.

Para $i \geq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$ se tiene que $p^*(c_i) = 2b_i \in H^*(B(n+1, k))$, luego

$$2\bar{f}_k^*(b_i) = g^*(c_i) = (-1)^i \binom{n+i}{n} z^i (2^m).$$

Esta última identidad implica que $\binom{n+i}{n}$ es par y que

$$2\bar{f}_k^*(b_i) = 2(-1)^i \frac{1}{2} \binom{n+i}{n} z^i (2^m).$$

Así

$$\bar{f}_k^*(b_i) = \frac{1}{2} \binom{n+i}{n} z^i (2^{m-1})$$

y dado que $m \geq 2$ se obtiene en particular

$$(1) \quad \bar{f}_k^*(b_i) = \frac{1}{2} \binom{n+i}{n} z^i (2).$$

Ahora, si $k = 2i$ y $a_i \in H^{2i}(B(n+1, 2i))$ con $i \leq n$, entonces $\bar{f}_k^*(a_i) = \lambda_i z^i \in H^{2i}(L^{2n+1}; \mathbb{Z})$ con $\lambda_i \in \mathbb{Z}/2^m$.

Como $Sq^2(a_i) = ib_{i+1} + a_i c_1$ y $Sq^2(\lambda_i z^i) = i\lambda_i z^{i+1}$, al aplicar \bar{f}_{2i}^* a $Sq^2(a_i)$ se tiene la siguiente identidad

$$(2) \quad i\lambda_i \equiv (n+1)\lambda_i + i \frac{1}{2} \binom{n+i+1}{n} (2)$$

que es válida para $i+1 \leq n$.

Similarmente, como $Sq^4(a_i) = \binom{i}{2}b_{i+2} + (i-1)b_{i+1}c_1 + a_ic_2$ y $Sq^4(\lambda_i z^i) = \binom{i}{2}\lambda_i z^{i+2}$, al aplicar \bar{f}_{2i}^* a $Sq^4(a_i)$ se tiene la siguiente identidad módulo 2

$$(3) \quad \binom{i}{2}\lambda_i \equiv \binom{n+2}{2}\lambda_i + (i-1)(n+1)\frac{1}{2}\binom{n+i+1}{n} + \binom{i}{2}\frac{1}{2}\binom{n+i+2}{n}$$

que es válida para $i+2 \leq n$.

Tomemos en adelante $i = l(n)$ y $m \geq 2$, por lo que (1) para $i+1$, y en consecuencia (2) y (3), es válida, en caso de existir \bar{f}_{2i} . De hecho, de acuerdo a la definición de $l(n)$, el tercer sumando de la ecuación (3) es nulo, por lo que ésta se transforma en

$$(4) \quad \binom{i}{2}\lambda_i \equiv \binom{n+2}{2}\lambda_i + (i-1)(n+1)\frac{1}{2}\binom{n+i+1}{n} \quad (2).$$

Si $n = 2^s$ con $s \geq 1$, en este caso tenemos que $i = l(n) = n-1$, entonces la ecuación (2) nos dice que

$$\frac{1}{2}\binom{n+i+1}{n} \equiv 0 \quad (2)$$

lo cual contradice la definición de $l(n)$.

Si n es par y $\alpha(n) \geq 2$, entonces (ver los comentarios siguientes al Lema 3.13 y (b) de la Observación 3.12) $i = l(n)$ es par y $i \leq n-2$. Entonces, de acuerdo a la ecuación (2), tenemos que $\lambda_i \equiv 0 \quad (2)$, y en consecuencia la ecuación (4) nos dice

$$0 \equiv \frac{1}{2}\binom{n+i+1}{n} \quad (2)$$

lo cual contradice la definición de $l(n)$.

Si n es impar y $\alpha(n) \geq 3$, tenemos que (ver (c) de la Observación 3.12 y los comentarios siguientes al Lema 3.13) $i = l(n) < n-3$ es impar, que

$$(5) \quad \lambda_i \equiv \frac{1}{2}\binom{n+i+1}{n} \quad (2)$$

y que

$$(6) \quad \binom{i}{2}\lambda_i \equiv \binom{n+2}{2}\lambda_i \quad (2).$$

Por otro lado $n \equiv 1, 3 \pmod{4}$. Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, entonces $l(n) \equiv 1 \pmod{4}$, $\nu\binom{i}{2} \geq 1$ y $\nu\binom{n+2}{2} = 0$. Utilizando la ecuación (6) tenemos que $\lambda_i \equiv 0 \pmod{2}$ y de acuerdo a (5)

$$0 \equiv \frac{1}{2} \binom{n+i+1}{n} \pmod{2} \quad (2)$$

lo cual contradice la definición de $l(n)$. Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, entonces $l(n) \equiv 3 \pmod{4}$, $\nu\binom{i}{2} = 0$ y $\nu\binom{n+2}{2} \geq 1$. Utilizando (6) tenemos que $\lambda_i \equiv 0 \pmod{2}$ lo cual, de acuerdo a (5) contradice la definición de $l(n)$. Esto concluye la demostración del primer inciso.

Si $n = 2^s + 1$ con $s \geq 1$ y $L^{2n+1}(2^m) \subseteq \mathbb{R}^{2n+1+2(n-2)-1}$ se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B(n+1, 2(n-2)-1) & \longrightarrow & BSO(2(n-2)-1) \\
 & & \downarrow p_{2n-5} & & \downarrow \\
 & \nearrow \bar{f}_{2(n-2)-1} & B(n+1, 2(n-2)) & & \\
 & \nearrow \bar{f}_{2(n-2)} & \downarrow & & \\
 L^{2n+1}(2^m) & \xrightarrow{g} & BU(n+1) & \longrightarrow & BSO(2n+2)
 \end{array}$$

La ecuación (2) toma ahora la forma (ver inciso (b) de la Observación 3.12)

$$\lambda_{n-2} \equiv \frac{1}{2} \binom{n+i+1}{n} \equiv \frac{1}{2} \binom{2n-1}{n} \pmod{2} \quad (2)$$

donde $\nu\binom{2n-1}{n} = 1$, por lo que $\lambda_{n-2} \equiv 1 \pmod{2}$, y además

$$\begin{aligned}
 \lambda_{n-2} z^{n-2} &= \bar{f}_{2(n-2)}^*(a_{n-2}) \\
 &= \bar{f}_{2(n-2)-1}^*(p_{2n-5}^*(a_{n-2})) \\
 &= \bar{f}_{2(n-2)-1}^*(b_{n-2}) \\
 &= \frac{1}{2} \binom{2n-2}{n} z^{n-2}
 \end{aligned}$$

donde $\nu\binom{2n-2}{n} = 2 + \alpha(n-2) - 1 \geq 2$, por lo que $z^{n-2} = 0$, que es una contradicción. Con ésto concluye la demostración del Teorema 3.10. \square

Observación 3.14 En la demostración del Teorema 3.10 sólo se utilizaron relaciones obtenidas a partir de Sq^2 y Sq^4 mientras que en el Teorema 3.8 se obtuvo $Sq^{2k}(a_j)$ para $k \geq 1$. Surge la pregunta natural: qué ocurre con las demás relaciones que proporcionan Sq^{2k} para $k \geq 3$.

Utilizando la misma notación que en el Teorema anterior y de acuerdo al Teorema 3.8 se tiene que para $k + i \leq n$

$$\begin{aligned} \binom{i}{k} \lambda_i &\equiv \binom{i}{k} \frac{1}{2} \binom{n+i+k}{n} + \binom{i-1}{k-1} \frac{1}{2} \binom{n+i+k-1}{n} \binom{n+1}{n} + \dots \\ &\quad + \binom{i-k+2}{2} \frac{1}{2} \binom{n+i+2}{n} \binom{n+k-2}{n} \\ &\quad + (i-k+1) \frac{1}{2} \binom{n+i+1}{n} \binom{n+k-1}{n} + \lambda_i \binom{n+k}{n} \quad (2). \end{aligned}$$

Lo cual, de acuerdo a la definición de $l(n)$, se convierte en la relación

$$(7) \quad \binom{i}{k} \lambda_i \equiv (i-k+1) \frac{1}{2} \binom{n+i+1}{n} \binom{n+k-1}{n} + \lambda_i \binom{n+k}{n} \quad (2).$$

Cuando $n+1 \leq k+i$ la relación que obtenemos es

$$(8) \quad 0 \equiv (i-k+1) \frac{1}{2} \binom{n+i+1}{n} \binom{n+k-1}{n} + \lambda_i \binom{n+k}{n} \quad (2)$$

pues $Sq^{2k}(a_i) = Sq^{2k}(z^i) = 0$. Cuando n es par y $\alpha(n) \geq 2$ vimos en la demostración del Teorema que $i = l(n)$ es par $\leq n-2$ y que $\lambda_i \equiv 0$, luego las ecuaciones (7) y (8) se transforman en

$$(9) \quad 0 \equiv (k+1) \frac{1}{2} \binom{n+i+1}{n} \binom{n+k-1}{n}$$

la cual sólo tiene interés de ser estudiada para k par, además de que k está restringido por la relación $k \leq i = l(n)$. Recuérdese que $2i$ es la codimensión de la inmersión supuesta. De modo que la ecuación (9) no conduce a mejora alguna de nuestro resultado. Similarmente, para n impar y $\alpha(n) \geq 3$ los términos que involucran a $i = l(n)$ en las ecuaciones (7) y (8) no conducen a mejora alguna.

Cuando $n = 2^s + 1$ se tiene que $i = l(n) = n-2$ y la ecuación (7) es válida para $k \leq 2$. El caso $k = 1$ fue estudiado en la prueba, mientras

que en el caso $k = 2$ la ecuación (7) es la ecuación (2.4) que se reduce a la relación $\binom{i}{2} \equiv \binom{n+2}{2}$ que no tiene mayor importancia. Por otro lado, la ecuación (8) toma la forma $0 \equiv k \binom{n+k-1}{n}$ pues $\frac{1}{2} \binom{2n-1}{n} \equiv 1$, y ésta sólo tendría interés para k impar, pero en tal caso $\nu \binom{n+k-1}{n} \geq 1$.

Con este argumento queda eliminada la posibilidad de mejorar nuestro resultado con las relaciones que producen $Sq^{2k}(a_i)$ con $k \geq 3$.

Agradecimientos

El autor agradece al Dr. Jesús González su apoyo y valiosa dirección durante la elaboración de este trabajo.

Enrique Torres Giese
Mathematics Department,
 University of Wisconsin-Madison,
 480 Lincoln Dr,
 Madison, WI 53706,
 torres@math.wisc.edu

Referencias

- [1] Davis D. M.; Mahowald M. E., *Immersiones of complex projective spaces and the generalized vector field problem*. Proc. London Math. Soc., **35** (1977), 333–344.
- [2] Dold A., *Lectures on Algebraic Topology*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.
- [3] González J., *Connective K-theoretic Euler classes and nonimmersions of 2^k lens spaces*. J. London Math. Soc., **63** (2001), 247-256.
- [4] González J., *Inmersión de variedades: Una excursión homotópica*, Aportaciones Matemáticas. Comunicaciones 30. Memorias del XXXIV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, (2002), 131-164.
- [5] Hatcher A., *Algebraic Topology*. Disponible a través de la red en: <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [6] Hatcher A., *Vector Bundles and K-theory*. Disponible a través de la red en: <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- [7] Hirsch M. W., *Immersiones of manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc., **93** (1959), 242–276.

- [8] Husemoller D., *Fibre Bundles*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1993.
- [9] Junod B., *A non-immersion result for Lens Spaces $L^n(2^m)$* . Math. J. Okayama Univ., **37** (1995), 137–151.
- [10] McCleary J., *A User's Guide to Spectral Sequences*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2000.
- [11] Milgram R. J., *Immersing projective spaces*. Ann. of Math, **85** (1967), 473-482.
- [12] Mosher R. E.; Tangora M. C., *Cohomology Operations and Applications in Homotopy Theory*. Harper & Row, New York-London, 1968.
- [13] Sanderson B. J.; Schwarzenberger R. L. E., *Non-immersion theorems for differentiable manifolds*. Proc. Cambridge Philos. Soc., **59** (1963), 222–319.
- [14] Spanier E., *Algebraic Topology*. Mc Graw-Hill. New York, 1966.
- [15] Switzer R., *Algebraic Topology-Homotopy and Homology*. Springer-Verlag, New York, 1975.