**Morfismos**, Vol. 21, No. 1, 2017, pp. 45–67

# Aproximación métrica de grupos: una breve perspectiva*

Luis Manuel Rivera    Nidya Monserrath Veyna García

**Resumen**

Los grupos sóficos y los grupos hiperlineales han generado una gran cantidad de investigación en los últimos años en diversas áreas de matemáticas tales como teoría geométrica de grupos, dinámica simbólica y álgebra de operadores. Además, los grupos sóficos han ganado interés porque se ha demostrado que cumplen varias conjeturas aún abiertas para los grupos en general. Las definiciones de ambas clases de grupos son análogas y se pueden pensar como dentro de una clase de grupos de reciente estudio que se conocen como los grupos que tienen la propiedad de aproximación métrica. En este artículo se presenta un panorama general de dicha clase de grupos.

*2010 Mathematics Subject Classification: 20-02, 20F65, 20E22, 43A07.*
*Keywords and phrases: Ultraproductos, grupos sóficos, grupos hiperlineales, aproximación de grupos.*

## 1 Introducción

El concepto de ultraproducto aparece de manera general en un artículo de Jerzy Łoš en 1955 [20], pero fue en años recientes cuando ha tomado importancia en ciertas áreas de la teoría de grupos. Lo anterior porque se ha demostrado que varias clases importantes de grupos tienen la característica común de ser isomorfos a subgrupos de ciertos ultraproductos de grupos, y en este caso decimos que el grupo en cuestión se

*Este artículo es parte de la tesis de licenciatura de la segunda autora bajo la dirección del primer autor. La tesis se presentó en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas en marzo del 2016 como requisito para obtener el título de Licenciada en Matemáticas.

aproxima por los grupos con los cuales se construye el ultraproducto. Fue en los años noventa cuando se comenzaron a definir estas clases de grupos, siendo los grupos sóficos y los grupos hiperlineales dos de las clases más importantes, las cuales surgen en diferentes ramas de la matemática (dinámica simbólica y álgebra de operadores, respectivamente). Estos grupos han ganado interés porque se ha demostrado que cumplen varias conjeturas importantes que siguen abiertas para grupos en general.

La clase de grupos sóficos fue definida, sin usar ultraproductos, por Gromov [15], quien demostró que esta clase de grupos satisfacen la conjetura de sobreyuntividad de Gottschalk [16]. El nombre de grupos sóficos se debe a Weiss [37]. Estos grupos son una generalización común de los grupos residualmente finitos y de los grupos amenables, y también incluyen, entre otros, a los grupos encajables localmente en finito, estos últimos presentados por Vershik y Gordon [14].

La clase de grupos hiperlineales fue definida por Rădulescu [28] quien demostró que estos grupos cumplen la conjetura del encaje de Connes en su versión para grupos. Elek y Szabó [9] demostraron que los grupos sóficos son hiperlineales al mostrar que se pueden encajar en un cierto ultraproducto métrico de grupos simétricos finitos, lo que implica que los grupos sóficos cumplen la conjetura del encaje de Connes.

Elek y Szabó [8] también demuestran que los grupos sóficos cumplen con la conjetura de finitud directa de Kaplansky y con la conjetura del determinante de Lück [9]. Posteriormente, Thom [35] demostró que dichos grupos tambíen cumplen con la conjetura de autovalores algebraicos de J. Dodziuk, P. Linnell, V. Mathai, T. Schick y S. Yates. A la fecha no se conocen ejemplos de grupos que no sean sóficos o hiperlineales. Más detalles sobre estas dos clases de grupos se pueden consultar, por ejemplo, en el resumen de Pestov [27], en el libro de Capraro y Lupini [3] y en la monografía de Ceccherini-Silberstein y Coornaert [6].

A partir de entonces, se han definido otras clases de grupos como posibles generalizaciones de los grupos sóficos: los grupos sóficos débiles, los grupos sóficos lineales y los grupos $K$-lineales. El siguiente diagrama muestra la relación entre algunas de estas clases de grupos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{Finito} & \Rightarrow & \text{Res. Finito} & \Rightarrow & \text{LEF} & & \text{Sófico Lineal} & \Rightarrow & \text{Sófico Débil} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Uparrow & & \\
\text{Amenable} & \Rightarrow & \text{Res. Amenable} & \Rightarrow & \text{LEA} & \Longrightarrow & \text{Sófico} & \Rightarrow & \text{Hiperlineal}
\end{array}$$

Los grupos sóficos, los grupos sóficos débiles, los grupos sóficos lineales y los grupos $K$-lineales se pueden definir sin usar ultraproductos, mediante definiciones que tiene muchas similitudes. La diferencia principal entre las respectivas definiciones para cada tipo de grupos, radica en la clase de grupos métricos que aproximan al grupo en cuestión. Por ejemplo, los grupos sóficos se aproximan por grupos simétricos finitos equipados con la métrica de Hamming y los grupos hiperlineales se aproximan por la clase de grupos unitarios de rango finito equipados con la métrica de Hilbert-Schmidt.

En este artículo se presenta un breve panorama de esta clase de grupos. Nuestro tratamiento del tema es limitado e incompleto pero tiene como objetivo presentar el área de investigación sobre la aproximación de grupos de manera breve.

A pesar de que la literatura sobre este tema está en constante crecimiento y se cuenta con al menos tres fuentes en donde se resumen algunos de los resultados del área ([6, 3, 27]), en la actualidad, a conocimiento de los autores, no se cuenta con literatura en español sobre este tema. Además, a diferencia de [6, 3, 27], en este artículo se aborda el tema de aproximación de manera general como se ha hecho recientemente por varios autores [12, 18, 19, 33, 36, 34]. La mayoría de resultados se presentan sin demostración pero se indica las fuentes en donde se pueden consultar.

El resto del artículo está organizado como sigue. En la sección 2 se presenta un breve resumen de definiciones y resultados sobre ultrafiltros. En la sección 3 se presentan a los ultraproductos y se define a los grupos que son localmente encajables en una clase de grupos por medio de dos definiciones, una de las cuales usa ultraproductos. En la sección 4 se define a los ultraproductos métricos y se definen el concepto de aproximación métrica de grupos. Posteriormente se dan varios ejemplos de esta clase de grupos: los grupos sóficos, los grupos hiperlineales, los grupos sóficos débiles y los grupos $K$-lineales. En la sección 5 se extiende la exposición sobre los grupos sóficos, que es la clase más estudiada en la teoría de aproximación de grupos. Se presentan varias definiciones equivalentes de grupos sóficos, algunos ejemplos y algunas propiedades de cerradura de esta clase de grupos. En la sección 7 se presenta una segunda definición de grupos aproximables que no usa ultrafiltros, esta definición es análoga a la de grupos sóficos. Además se presentan algunos resultados de cerradura de esta clase de grupos.

## 2 Ultrafiltros

Vamos a presentar una breve introducción a la teoría de ultrafiltros. Esta sección esta basada principalmente en [1, capítulo 2], [6, apéndice J] y [38, capítulo 1].

**Definición 2.1.** Sea $X$ un conjunto no vacío. Un *filtro* $\mathcal{F}$ en $X$ es una familia no vacía de subconjuntos de $X$ que satisface

*F1*) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

*F2*) Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$;

*F3*) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Algunos autores, por ejemplo en [1], no incluyen la condición (F1) en la definición de filtro. Notemos que si usamos únicamente las condiciones (F2) y (F3) en la definición anterior, sigue que $\emptyset \in \mathcal{F}$ si y solo si $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$. En este caso, al conjunto $\mathcal{P}(X)$ se le llama *filtro impropio.*

Los siguientes son ejemplos de filtros:

**Ejemplo 2.2.** (a) Para $x_0 \in X$, la familia $\mathcal{F}_{x_0} = \{A \subseteq X : x_0 \in A\}$ es un filtro en $X$ y se llama *filtro principal* generado por $x_0$.

(b) Sea $X$ un conjunto infinito. La familia

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es finito}\},$$

es un filtro en $X$ y se llama el *filtro de Fréchet* en $X$. Notemos que este filtro no es principal.

(c) Sea $T$ una topología en $X$, y $x \in X$. El conjunto

$$\mathcal{N}(x) = \{V : V \text{ es una vecindad de } x\}$$

es un filtro en $X$. A este filtro se le conoce como el *filtro de vecindades* de $x$.

(d) Sea $(X, \leq)$ un conjunto dirigido no vacío. Un subconjunto $A \subseteq X$ se llama *residual* en $X$ si existe $x_0 \in X$ tal que el conjunto $\{x \in X : x_0 \leq x\}$ es un subconjunto de $A$. El conjunto $\mathcal{F}_r(X)$ de todos los subconjuntos residuales de $X$ es un filtro en $X$ y se llama el *filtro residual* en $X$.

Notemos que si consideramos al conjunto dirigido $(\mathbb{N}, \leq)$, un subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es residual si y solo si $\mathbb{N} \setminus A$ es finito. Entonces, se tiene que el filtro residual en $\mathbb{N}$ es el filtro de Fréchet en $\mathbb{N}$.

**Proposición 2.3.** *Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $X$ es principal si y solo si existe un conjunto finito en $\mathcal{U}$.*

**Definición 2.4.** Sea $X$ un conjunto. Decimos que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$ tiene la *propiedad de intersección finita*, o que es un *sistema centrado*, si la intersección de cualquier subcolección finita de $\mathcal{A}$ es no vacía.

**Proposición 2.5.** *Sea $X$ un conjunto no vacío y sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces, existe un filtro en $X$ que contiene a $\mathcal{A}$ si y solo si $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de intersección finita.*

**Definición 2.6.** Un filtro $\mathscr{F}$ en $X$ se llama *ultrafiltro* si es un filtro maximal (relativo a la inclusión).

**Proposición 2.7.** *Un filtro $\mathcal{U}$ en $X$ es un ultrafiltro si y solo si para todo $A \subseteq X$, o bien $A \in \mathcal{U}$, o bien $X \setminus A \in \mathcal{U}$.*

**Definición 2.8.** Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es libre, si sus elementos no tienen puntos en común, es decir, si $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$.

Observemos que cualquier filtro principal es un ultrafiltro. Si consideramos a $X = \mathbb{N}$ tenemos que el filtro de Fréchet en $\mathbb{N}$ no es un ultrafiltro porque ninguno de los conjuntos $2\mathbb{N}$ o $\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ pertenecen a dicho filtro, sin embargo se sabe que cualquier ultrafiltro libre sobre $X$ contiene al filtro de Fréchet. La siguiente proposición requiere del Lema de Zorn.

**Teorema 2.9.** *Sea $X$ un conjunto no vacío. Cualquier filtro en $X$ es un subconjunto de algún ultrafiltro en $X$.*

**Proposición 2.10.** *Todo ultrafiltro es, o bien principal, o bien libre.*

La existencia de los ultrafiltros libres es una consecuencia del Lema de Zorn. Por ejemplo, considere la siguiente colección de subconjuntos de $\mathbb{N}_+$

$$\mathcal{C} = \{\mathbb{N}_+ \setminus \{n\} : n \in \mathbb{N}_+\}.$$

Esta colección de conjuntos tiene la propiedad de intersección finita, y es tal que $\bigcap \mathcal{C} = \emptyset$. Así por la proposición 2.5 y el teorema 2.9, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ que lo contiene. Además, $\cap \mathcal{U} \subseteq \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Por lo tanto $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro libre.

**Definición 2.11.** Sea $X$ un conjunto, $Y$ un espacio topológico, $y_0 \in Y$, $f : X \to Y$ una función y $\mathcal{F}$ un filtro en $X$. Se dice que $y_0$ es un *límite* de $f$ a lo largo de $\mathcal{F}$ (o que $f(x)$ *converge* a $y_0$ a lo largo de $\mathcal{F}$), si $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ pertenece a $\mathcal{F}$ para todo vecindad $V$ de $y_0$. Si además $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro decimos que $y_0$ es un *ultralímite* de $f$ a lo largo de $\mathcal{F}$. Si $y_0$ es un límite único se denota por

$$\lim_{x \to \mathcal{F}} f(x) = y_0, \quad \text{o simplemente por } \lim_{\mathcal{F}} f(x) = y_0.$$

**Proposición 2.12.** *Sean $X$ un conjunto, $Y$ un espacio topológico compacto, $f : X \to Y$ una función, y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $X$. Entonces existe $y_0 \in Y$ tal que $f(x)$ converge a $y_0$ a lo largo de $\mathcal{F}$. Además, si $Y$ es Hausdorff, entonces $y_0$ es único.*

La definición de ultralímite para el caso de series de números reales, queda como sigue:

**Definición 2.13.** Sea $\{x_i\}_{i \in I}$ una familia de números reales y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $I$. Decimos que $\lim\limits_{u} x_i = x \in \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ se tiene

$$\{i \in I : |x_i - x| < \epsilon\} \in \mathcal{U}$$

El cálculo del ultralímite depende de la selección del ultrafiltro. Por ejemplo, sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia convergente de números reales. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro principal en $\mathbb{N}$ generado por $\{n_0\}$, se puede demostrar que $\lim\limits_{u} x_n = x_{n_0}$.

Ahora, sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre en $\mathbb{N}$, sea $x$ el límite clásico de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se puede demostrar que $\lim\limits_{u} x_n = x$.

# 3 Ultraproductos de grupos

Vamos a presentar una estructura algebraica que se construye como cociente de un producto directo $P$ de una familia de grupos $(G_i)_{i \in I}$. Donde el cociente está dado por una cierta relación en $P$ que se define usando un filtro $\mathcal{F}$ en $I$. Cuando el filtro $\mathcal{F}$ es ultrafiltro, a dicha estructura se le conoce como ultraproducto. Además, vamos a presentar una clase de grupos, en donde cada grupo de dicha clase tiene la propiedad de poderse encajar en un cierto ultraproducto. Esta sección está basado principalmente en la monografía de Ceccherini-Silberstein y Coornaert [6, sección 7].

Sea $(G_i)_{i\in I}$ una familia de grupos y $\mathcal{F}$ un filtro en el conjunto de índices $I$. Sea $P$ el producto directo de la familia $(G_i)_{i\in I}$, es decir

$$P = \prod_{i\in I} G_i.$$

Sean $\mathbf{g} = (g_i)_{i\in I}$ y $\mathbf{h} = (h_i)_{i\in I}$ elementos de $P$. Decimos que $\mathbf{g} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{h}$ si el conjunto $\{i \in I : g_i = h_i\}$ pertenece a $\mathcal{F}$. Esta relación es de equivalencia como se muestra en los puntos (1)-(3) de la siguiente proposición.

**Proposición 3.1.** *Para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in P$ se tiene que:*

1. $\mathbf{a} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{a}$*;*
2. $\mathbf{a} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{b}$ *si y solo si* $\mathbf{b} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{a}$*;*
3. *Si* $\mathbf{a} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{b}$ *y* $\mathbf{b} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{c}$ *entonces* $\mathbf{a} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{c}$*;*
4. *Si* $\mathbf{a} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{b}$ *y* $\mathbf{c} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{d}$ *entonces* $\mathbf{ac} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{bd}$*;*
5. $\mathbf{a} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{b}$ *si y solo si* $\mathbf{a}^{-1} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{b}^{-1}$*.*

Con los puntos (3) y (4) de la proposición anterior se puede demostrar la siguiente

**Proposición 3.2.** *Sea $N_{\mathcal{F}} = \{\mathbf{g} \in P : \mathbf{g} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{1}\}$, en donde $\mathbf{1} = (1_{G_i})_{i\in I}$, con $1_G$ la identidad del grupo $G$. Entonces $N_{\mathcal{F}}$ es un subgrupo normal de $P$.*

Como $N_{\mathcal{F}}$ es un grupo normal de $P$, el grupo cociente $P_{\mathcal{F}} = P/N_{\mathcal{F}}$ está bien definido. Este grupo se llama *producto reducido* de la familia de grupos $(G_i)_{i\in I}$ con respecto al filtro $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro, decimos que $P_{\mathcal{F}}$ es el *ultraproducto* de la familia de grupos $(G_i)_{i\in I}$ con respecto al ultrafiltro $\mathcal{F}$. La siguiente proposición implica que el conjunto cociente $P/_{\sim_{\mathcal{F}}}$ y el conjunto $P/N_{\mathcal{F}}$ son iguales.

**Proposición 3.3.** *Si $\mathbf{g}, \mathbf{h} \in P$, entonces*

$$\mathbf{g}N_{\mathcal{F}} = \mathbf{h}N_{\mathcal{F}} \Longleftrightarrow \mathbf{g} \sim_{\mathcal{F}} \mathbf{h}.$$

Cuando $\mathcal{F}$ es un filtro principal, el grupo $P/N_{\mathcal{F}}$ no es interesante en el sentido de que es isomorfo a un grupo en la familia $(G_i)_{i\in I}$ como se muestra a continuación. Sea $\mathcal{F}_k$ el filtro principal en $I$ generado por $k$, entonces $\mathbf{g} \sim_{\mathcal{F}_k} \mathbf{1}$ si y solo si $g_k = 1_{G_k}$. Por lo tanto $N_{\mathcal{F}_k} = \{\mathbf{g} \in P : g_k = 1_{G_k}\}$. Si definimos la función $\phi\colon P \to G_k$ como $\phi(\mathbf{g}) = g_k$, tenemos que $\phi$ es un homomorfismo sobreyectivo con $\ker(\phi) = N_{\mathcal{F}_k}$. Por el primer teorema de homomorfismo de grupos obtenemos que $P/N_{\mathcal{F}_k} \simeq G_k$.

## 3.1 Grupos encajables localmente

En esta sección vamos a definir a los grupos encajables localmente como primer ejemplo de grupos que se pueden aproximar, en un cierto sentido, por una clase de grupos. Primero algunas definiciones.

**Definición 3.4.** Una colección de grupos $\mathscr{G}$ es una *clase de grupos* si satisface lo siguiente: si $G \in \mathscr{G}$ y $G'$ es un grupo isomorfo a $G$ entonces $G' \in \mathscr{G}$.

Por ejemplo $\mathscr{G}$ puede ser la clase de grupos finitos, la clase de grupos nilpotentes, la clase de grupos solubles, etc.

**Definición 3.5.** Sean $G$ y $H$ dos grupos. Dado un subconjunto finito $F \subseteq G$, una función $\phi\colon G \to H$ se llama *$F$-casi-homomorfismo* de $G$ en $H$ si satisface:

i) $\phi(f_1 f_2) = \phi(f_1)\phi(f_2)$, para todo $f_1, f_2 \in F$;

ii) $\phi|_F$ es inyectiva.

**Definición 3.6.** Sea $\mathscr{G}$ una clase de grupos. Se dice que un grupo $\Gamma$ es *localmente encajable* en $\mathscr{G}$ si para todo subconjunto finito $F \subseteq \Gamma$, existe un grupo $G \in \mathscr{G}$ y un $F$-casi-homomorfismo $\varphi$ de $\Gamma$ en $G$.

Por ejemplo, el grupo $\mathbb{Z}$ es localmente encajable en la clase de grupos finitos (grupos LEF por sus siglas en inglés) como se muestra a continuación. Sea $F$ un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, elegimos a un entero $n \geq 0$ tal que $F \subset [-n, n]$. Entonces, el homomorfismo cociente $\phi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ es un $F$-casi-homomorfismo. Más adelante veremos otros ejemplos de grupos LEF.

Algunas propiedades de cerradura de esta clase de grupos son las siguientes.

**Proposición 3.7.** *Sea $\mathscr{G}$ una clase de grupos. Todo subgrupo de un grupo que es localmente encajable en $\mathscr{G}$ es localmente encajable en $\mathscr{G}$.*

**Proposición 3.8.** *Sea $\mathscr{G}$ una clase de grupos. Entonces $\Gamma$ es localmente encajable en $\mathscr{G}$ si y solo si todo subgrupo finitamente generado de $\Gamma$ es localmente encajable en $\mathscr{G}$.*

En el caso en que la clase $\mathscr{G}$ sea cerrada bajo productos directos tenemos que la encajabilidad local es cerrada al tomar producto directo.

**Proposición 3.9.** *Sea $\mathscr{G}$ una clase de grupos la cual es cerrada bajo productos directos finitos. Sea $(\Gamma_i)_{i\in I}$ una familia de grupos que son localmente encajables en $\mathscr{G}$. Entonces, su producto directo $\Gamma = \prod_{i\in I}\Gamma_i$ es localmente encajable en $\mathscr{G}$.*

Los grupos localmente encajables son un ejemplo de grupos que se pueden definir usando ultraproductos como lo muestra el siguiente teorema.

**Teorema 3.10.** *Sea $\mathscr{G}$ una clase de grupos y sea $\Gamma$ un grupo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

*a)* $\Gamma$ *es localmente encajable en* $\mathscr{G}$*;*

*b) Existe una familia de grupos $(G_i)_{i\in I}$ tal que $G_i \in \mathscr{G}$, para todo $i \in I$, y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $I$ tal que $\Gamma$ es isomorfo a un subgrupo del ultraproducto $P_{\mathcal{U}}$ de la familia $(G_i)_{i\in I}$ con respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$.*

Si $\Gamma$ es un grupo que cumple con la condición (b) del teorema anterior decimos que $\Gamma$ es *aproximado* por los grupos en la familia $(G_i)_{i\in I}$. Una consecuencia de este teorema es que la definición de grupos encajables localmente no depende de la selección particular del ultrafiltro.

Al parecer, Gordon y Vershik fueron los primeros en estudiar a los grupos encajables localmente en la clase de grupos finitos (LEF) [14]. En su trabajo ellos mostraron que las siguientes clases de grupos son LEF: grupos finitos, grupos libres, grupos abelianos, grupos nilpotentes, grupos de matrices. Ellos también demostraron que cualquier grupo finitamente presentado con problema de la palabra no decidible (Pyotr Novikov [24] demostró que tales grupos existen) no es un grupo LEF. Además, demostraron que el grupo

$$G = \langle b, t\colon t^{-1}b^2t = b^3\rangle$$

es un grupo finitamente presentado con problema de la palabra decidible que no es LEF. En el libro de Magnus, Karrass y Solitar [21] se pueden consultar las definiciones y resultados básicos sobre el tema de presentaciones de grupos y sobre el problema de la palabra.

# 4 Aproximación métrica de grupos

En esta sección vamos a presentar otro tipo de aproximación de grupos conocida como aproximación métrica. Esta sección está basada principalmente en los artículos de Stolz [33, sección 2] y de Stolz y Thom

[34, sección 2]. Ambos artículos forman parte de la tesis doctoral de Stolz [32]. Vamos a utilizar funciones de longitud, en lugar de métricas, que es en la manera como lo han hecho recientemente diversos autores [12, 19, 32, 33, 36, 34].

**Definición 4.1.** Sea $G$ un grupo. Una función $\ell\colon G \to [0,1]$ es una función de longitud en $G$ si para todo $g, h \in G$ se cumple lo siguiente:

FL1) $\ell(g) = 0$ si y solo si $g = 1$;

FL2) $\ell(g) = \ell(g^{-1})$;

FL3) $\ell(gh) \leq \ell(g) + \ell(h)$.

Decimos que $\ell$ es *invariante* si además se cumple $\ell(hgh^{-1}) = \ell(g)$, para todo $h, g \in G$. Notemos que esta condición es equivalente a pedir que $\ell(gh) = \ell(hg)$ para todo $h, g \in G$. A una función $\ell$ se le llama *pseudo función de longitud* si remplazamos la condición (FL1) por $\ell(1) = 0$.

La *función de longitud trivial* $\ell_0$ sobre un grupo $G$ se define como $\ell_0(g) = 1$ si $g \neq 1$ y $\ell_0(1) = 0$. Las (pseudo) funciones de longitud están relacionadas con las (pseudo) métricas como sigue

**Proposición 4.2.** *Sea $\ell$ una (pseudo) función de longitud en un grupo $G$. Entonces $d(g,h) := \ell(gh^{-1})$ define una (pseudo) métrica en $G$. Si $\ell$ es invariante entonces $d$ es bi-invariante. Si por el contrario $d$ es una (pseudo) métrica izquierdo-invariante en $G$ entonces $\ell(g) := d(g,1)$ es una (pseudo) función de longitud. Si $d$ es bi-invariante entonces $\ell$ es invariante.*

Algunos ejemplos de funciones de longitud son:

1. Sea [n] el conjunto de los naturales $\{1, \ldots, n\}$. Denotemos por $S_n$ al grupo simétrico $\mathrm{Sym}([n])$ que consiste de todas las funciones biyectivas de $[n]$ sobre $[n]$ con la operación de grupo dada por la composición de funciones. La función de longitud de Hamming de una permutación $\sigma \in S_n$, se define como

$$\ell_H(\sigma) = \frac{|\{i \in [n] \colon \sigma(i) \neq i\}|}{n}.$$

2. El grupo $U_n$ de elementos unitarios de $M_n(\mathbb{C})$ se puede equipar con la función de longitud invariante de Hilbert-Schmidt definida como

$$\ell_{HS}(g) = d_{HS}(g, 1),$$

con $d_{HS}(A,B) = \sqrt{\tau\left((A-B)^*(A-B)\right)}$, en donde $\tau$ es la traza normalizada en $U_n(\mathbb{C})$ dada por $\tau(C) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}$, y $C^*$ es la matriz transpuesta conjugada de $C$, para $C \in U_n(\mathbb{C})$.

3. En $GL(n,\mathbb{C})$, el grupo de las matrices de $n \times n$ invertibles sobre $\mathbb{C}$, se define la función de longitud del rango

$$\ell_L(A) = \frac{1}{n} rango(I - A).$$

4. Para cualquier grupo finito $G$ se puede definir la pseudo función de longitud conjugación dada por

$$\ell_c(g) = \frac{log|C(g)|}{log|G|}$$

donde $C(g)$ denota la clase de conjugación de $g$.

La siguiente proposición muestra una manera de definir una pseudo función de longitud invariante en el cociente de un grupo que tiene pseudo función de longitud invariante.

**Proposición 4.3.** *Sea $G$ un grupo con pseudo función de longitud invariante $\ell$ y $H$ un subgrupo normal de $G$. Entonces*

$$\ell_{G/H}(gH) := \inf_{x \in H} \ell(gx)$$

*define una pseudo función de longitud invariante en $G/H$. Si $G$ es finito y $\ell$ es una función de longitud, entonces $\ell_{G/H}$ es una función de longitud.*

## 4.1 Ultraproductos métricos de grupos

Ahora vamos a construir los ultraproductos métricos. Para ello necesitamos el siguiente resultado.

**Proposición 4.4.** *Sea $G$ un grupo con pseudo función de longitud invariante $\ell$. Entonces el conjunto*

$$N = \{g \in G \colon \ell(g) = 0\}$$

*es un subgrupo normal de $G$. Además*

$$\ell_{G/N}(gN) = \ell(g), \ g \in G,$$

*y $\ell_{G/N}$ define una función de longitud invariante en $G/N$.*

Para que $N$ sea un grupo normal es necesario que la pseudo función de longitud sea invariante como lo muestra el siguiente ejemplo, que aparece en el resumen de Pestov [27]. Para este ejemplo vamos a utilizar métrica en lugar de función de longitud.

**Ejemplo 4.5.** Sea $S_{\mathbb{N}}$ el grupo simétrico que consiste de todas las biyecciones de $\mathbb{N}$ sobre si mismo, equipado con la siguiente métrica:

$$d(\sigma,\tau) = \sum_{i\in D} 2^{-i}$$

en donde $D = \{i \in \mathbb{N} \colon \sigma(i) \neq \tau(i)\}$, y usamos la convención de que la suma es cero cuando $D$ es el conjunto vacío. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre $\mathbb{N}$. Sean $\sigma, \tau \in \prod_{\mathbb{N}} S_{\mathbb{N}}$, tales que $\sigma = (\sigma_i)$, con $\sigma_i = (i, i+1)$, y $\tau = (\tau_i)$, con $\tau_i = (1, i)$ (las funciones $\sigma_i$ y $\tau_i$ están expresadas en notación cíclica). Es decir, $\sigma$ y $\tau$ son dos sucesiones de transposiciones en $S_{\mathbb{N}}$. Puesto que $d(\sigma_i, 1) = 2^{-i} + 2^{-(i+1)}$ tenemos que $\lim_u d(\sigma_i, 1) = 0$ y así $\sigma \in N$. Pero, como $\tau_i\sigma_i\tau_i^{-1} = (1, i+1)$ y $d((1, i+1), 1) = 2^{-1} + 2^{-(i+1)}$, entonces $\lim_u d\left(\sigma_i^{-1}\tau_i\sigma_i, 1\right) = 1/2$, lo cual implica que $\tau_i\sigma_i\tau_i^{-1} \notin N$. Por lo tanto $N$ no es un subgrupo normal de $\prod_{\mathbb{N}} S_{\mathbb{N}}$.

En la siguiente proposición se define una pseudo función de longitud invariante en el producto directo de grupos equipados con pseudo función de longitud invariante.

**Proposición 4.6.** *Sean $(G_i, \ell_i)_{i\in I}$ una secuencia de grupos cada uno equipado con una pseudo función de longitud $\ell_i$ invariante. Sea $P = \prod_{i\in I} G_i$ su producto directo. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro libre sobre $I$. Para cada $\mathbf{g} \in P$, definimos*

$$\tilde{\ell}(\mathbf{g}) := \lim_u \ell_i(g_i).$$

*Entonces $\tilde{\ell}$ define una pseudo función de longitud invariante en $P$.*

Por las proposiciones 4.4 y 4.6 obtenemos que el grupo cociente

$$(P)_u := \prod_{i\in I} G_i/N,$$

está bien definido, con $N = \{\mathbf{g} \in P \colon \tilde{\ell}(\mathbf{g}) = 0\}$, y además $\ell_{P/N}(\mathbf{g}N)$ es una función de longitud invariante en $P/N$ tal que $\ell_{P/N}(\mathbf{g}N) = \tilde{\ell}(\mathbf{g})$, para todo $\mathbf{g} \in P$.

Al grupo $(P)_u$ se lo conoce como el *ultraproductro métrico* de la familia $(G_i, \ell_i)_{i\in I}$ módulo $\mathcal{U}$.

## 4.2 Grupos $\mathscr{G}$–aproximables

Vamos a dar una definición de aproximación métrica de grupos que usa ultraproductos.

**Definición 4.7.** Sea $\mathscr{G}$ una clase de grupos, en donde cada grupo en la clase $\mathscr{G}$ está equipado con una pseudo función de longitud invariante. Decimos que un grupo $\Gamma$ tiene la propiedad de $\mathscr{G}$-aproximación métrica si existe un conjunto de índices $I$ y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $I$ tal que $\Gamma$ es isomorfo a un subgrupo de un ultraproducto métrico $(\prod_{i\in I} G_i)_u$, con grupos $G_i \in \mathscr{G}$. En este caso decimos que el grupo $\Gamma$ es aproximado de forma métrica por los grupos en la clase $\mathscr{G}$.

Desde hace varios años se han estudiado clases de grupos que tienen la propiedad de aproximación métrica. A estos grupos se les han dado diferentes nombres dependiendo de la clase de grupos $\mathscr{G}$ que los aproximan y de las métricas con las que cuentan los grupos en $\mathscr{G}$.

**Definición 4.8.** Si $\Gamma$ tiene la propiedad de $\mathscr{G}$-aproximación, al grupo $\Gamma$ se le llama:

- Localmente encajable en finito si $\mathscr{G}$ es la clase de grupos finitos con la función de longitud trivial $\ell_0$ (Gordon y Vershik, [14]).
- Sófico si $\mathscr{G}$ es la clase de grupos simétricos finitos con la función de longitud de Hamming (Gromov, [15]).
- Hiperlineal si $\mathscr{G}$ es la clase de matrices unitarias de rango finito sobre $\mathbb{C}$ con la función de longitud de Hilbert-Schmidt (Rădulescu, [28]).
- Sófico débil si $\mathscr{G}$ es la clase de todos los grupos finitos, en donde cada grupo está equipado con alguna función de longitud invariante (Glebsky y Rivera, [13]).
- Sófico lineal si $\mathscr{G}$ es la clase de grupos lineales generales $GL(n, \mathbb{C})$ con $\ell(A) = \frac{1}{n} rango(I - A)$ (Arzhantseva y Păunescu, [2]).
- $K$-sófico si $\mathscr{G}$ es la clase de grupos lineales generales $GL(n, F)$, para $F$ un campo fijo, con la longitud rango (Stolz, [33]).

Los grupos sóficos están relacionados con los grupos hiperlineales de la siguiente manera. A cada permutación $\sigma \in S_n$ le podemos asociar una matriz $A_\sigma$ de $n \times n$ de la siguiente manera:

$$(A_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función $\sigma \mapsto A_\sigma$ define un encaje de $S_n$ al grupo unitario $U(n)$. Se puede verificar que $\ell_H(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\ell_{HS}(A_\alpha)\right)^2$, para toda $\alpha$ en $S_n$. Usando lo anterior Elek y Szabó [9] demostraron que los grupos sóficos son hiperlineales. Las otras clases se relacionan como sigue: los grupos LEF son sóficos, los grupos sóficos son sóficos débiles [13], los grupos sóficos son sóficos lineales, y los grupos sóficos lineales son sóficos débiles [2]. En todos los casos se desconoce si el recíproco es verdadero. A la fecha no se conocen ejemplos de grupos que no sean sóficos, o hiperlineales, o sóficos débiles, o sóficos lineales, o $K$-sóficos, y el encontrar un ejemplo de un grupo que no cumpla con alguna de estas definiciones es uno de los problemas más importantes en la teoría de aproximación de grupos. En la siguiente sección continuaremos con la exposición sobre grupos sóficos.

## 5 Grupos sóficos

Los grupos sóficos, son una de las clases de grupos $\mathscr{G}$-aproximables más estudiadas a la fecha y son una generalización común de dos clases importantes de grupos: los grupos residualmente finitos y los grupos amenables. En esta sección vamos a dar otra definición de grupos sóficos que no usa ultraproductos y vamos a presentar algunas propiedades de cerradura de esta clase de grupos. La equivalencia de las dos definiciones la da el teorema 7.2.

**Definición 5.1.** Sea $G$ un grupo, $K \subseteq G$ un subconjunto finito no vacío, $\epsilon > 0$ y $F$ un conjunto finito no vacío. Una función $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(F)$ se llama $(K,\epsilon)$-*casi-homomorfismo* si satisface las siguientes condiciones:

i) para todo $g, h \in K$, $d_H(\varphi(g)\varphi(h), \varphi(gh)) \leq \epsilon$;

ii) para todo $g, h \in K$, $g \neq h$, se tiene $d_H(\varphi(g), \varphi(h)) \geq 1 - \epsilon$.

**Definición 5.2.** Un grupo $\Gamma$ es llamado sófico si para todo $K \subseteq \Gamma$ subconjunto finito y para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito no vacío $F$ y un $(K,\epsilon)$-casi-homomorfismo $\varphi : G \to \mathrm{Sym}(F)$.

Para el caso de grupos finitamente generados esta definición de grupos sóficos es equivalente a la definición original presentada por Gromov [15] y Weiss [37] (una demostración se puede consultar, por ejemplo, en [6, sección 7.7]). La siguiente proposición aparece en [25, capítulo 6] y es una recopilación de otras definiciones equivalentes de grupos sóficos que han aparecido a lo largo de la literatura.

**Proposición 5.3.** *Sea $\Gamma$ un grupo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Para cada subconjunto finito $K \subseteq \Gamma$ y para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito no vacío $F$ y una función $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(F)$ con las propiedades:*

   *i)* $d_H(\phi(g)\phi(h), \phi(gh)) \leq \epsilon$ *para cada* $g, h \in K$;

   *ii)* $d_H(\phi(1_\Gamma), 1_{\mathrm{Sym}(F)}) \leq \epsilon$;

   *iii)* $d_H(\phi(g), \phi(h)) \geq 1 - \epsilon$ *para cada* $g, h \in K$ *con* $g \neq h$.
   *(El grupo $\Gamma$ tiene la propiedad de $\mathscr{G}$-aproximación discreta fuerte)*

2. *Para cada subconjunto finito $K \subseteq \Gamma$ y para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito no vacío $F$ y una función $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(F)$ con las propiedades:*

   *i)* $d_H(\phi(g)\phi(h), \phi(gh)) \leq \epsilon$ *para cada* $g, h \in K$;

   *ii)* $d_H(\phi(g), \phi(h)) \geq 1 - \epsilon$ *para cada* $g, h \in K$ *con* $g \neq h$.

3. *Para cada constante $\delta \in (0, 1)$, cada subconjunto finito $K \subseteq \Gamma$ y todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito no vacío $F$ y una función $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(F)$ con las propiedades:*

   *i)* $d_H(\phi(g)\phi(h), \phi(gh)) \leq \epsilon$ *para cada* $g, h \in K$;

   *ii)* $d_H(\phi(g), \phi(h)) \geq \delta$ *para cada* $g, h \in K$ *con* $g \neq h$.
   *(El grupo $\Gamma$ tiene la propiedad de $\mathscr{G}$-aproximación discreta)*

4. *Existe algún $\delta > 0$ tal que para cada subconjunto finito $K \subseteq \Gamma$ y todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito no vacío $F$ y una función $\phi\colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(F)$ con las propiedades:*

   *i)* $d_H(\phi(g)\phi(h), \phi(gh)) \leq \epsilon$ *para cada* $g, h \in K$;

   *ii)* $d_H(\phi(g), \phi(h)) \geq \delta$ *para cada* $g, h \in K$ *con* $g \neq h$.
   *($\Gamma$ tiene la propiedad de $\mathscr{G}$-aproximación)*

5. *Para cada conjunto finito $K \subseteq \Gamma$, existe un $\delta_K$ tal que para cada $\epsilon > 0$, existe un subconjunto finito no vacío $F$ y una función $\varphi\colon \Gamma \to \mathrm{Sym}(F)$ con las siguientes propiedades:*

   *i)* $d_H(\phi(g)\phi(h), \phi(gh)) \leq \epsilon$ *para cada* $g, h \in K$*;*

   *ii)* $d_H(\phi(g), \phi(h)) \geq \delta_K$ *para cada* $g, h \in K$ *con* $g \neq h$*.*

**Definición 5.4.** Un grupo $\Gamma$ se llama *sófico* si cumple alguna (y por lo tanto todas) de las condiciones (1)-(5) de la proposición anterior.

**Teorema 5.5.** *La clase de grupos sóficos es cerrada con respecto a las siguientes operaciones:*

1. *Subgrupos [10];*
2. *Producto directo [10];*
3. *Límites directos [10];*
4. *Límites inversos [10];*
5. *Productos libres [10];*
6. *Producto gráfico [4];*
7. *Producto trenzado [17];*
8. *Producto libre amalgamado sobre grupos amenables [11, 26] ;*
9. *Extensiones por grupos amenables: si $N \lhd G$, $N$ es sófico y $G/N$ es amenable, entonces $G$ es sófico [10];*
10. *Extensiones HNN sobre grupos amenables [5, 11, 26].*

# 6 Ejemplos de grupos sóficos

Los grupos sóficos generalizan a dos clases importantes de grupos: los grupos residualmente finitos y los grupos amenables.

**Definición 6.1.** Un grupo $\Gamma$ es *residualmente finito* si para cada elemento $g \in \Gamma$ con $g \neq 1_\Gamma$, existe un grupo finito $G$ y un homomorfismo $\phi\colon \Gamma \to G$ tal que $\phi(g) \neq 1_G$.

La clase de grupos residualmente finitos contienen a todos los grupos finitos, a los grupos abelianos finitamente generados (en particular el grupo aditivo $\mathbb{Z}$), y a los grupos libres, entre otros. La clase de grupos residualmente finitos es cerrada al tomar subgrupos y límites inversos. Un teorema de Mal'cev [22] muestra que todos los grupos lineales finitamente generados son residualmente finitos. Los grupos aditivos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ no son grupos residualmente finitos. En el libro [6, sección 2] se puede consultar las demostraciones de lo dicho anteriormente, y otras propiedades de esta clase de grupos. Dos problemas importantes que permanecen abiertos sobre este tema son los siguientes: 1) determinar si todos los grupos Gromov-hiperbólicos son residualmente finitos; 2) determinar bajo que condiciones un grupo con un solo relator es residualmente finito [29].

**Proposición 6.2.** *Todo grupo residualmente finito es sófico.*

**Definición 6.3.** Un grupo discreto $\Gamma$ es amenable si para todo subconjunto finito $\Lambda \subset \Gamma$ y para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto $E$ que es $(\Lambda, \epsilon)$-Flner, es decir, un subconjunto finito $E$ de $\Gamma$ tal que para todo $g \in \Lambda$

$$|gE \triangle E| < \epsilon |E|,$$

donde $\triangle$ denota la diferencia simétrica entre conjuntos.

Cualquier grupo finito es amenable: sea $\Gamma$ un grupo finito, entonces para cualquier subconjunto finito $\Lambda \subset \Gamma$ y para todo $\epsilon > 0$, el grupo $\Gamma$ es un conjunto $(\Lambda, \epsilon)$-Flner porque $|g\Gamma \Delta \Gamma| = 0$.

La clase de los grupos amenables contiene a los grupos finitos, a los grupos abelianos y a los grupos solubles, entre otros. El grupo $\mathbb{Q}$ es amenable pero no residualmente finito y el grupo libre con dos generadores $F_2$ es residualmente finito pero no amenable (las demostraciones de estos hechos y más información de esta clase de grupos se puede consultar en [6, sección 4]).

**Proposición 6.4.** *Todo grupo amenable es sófico.*

Finalizamos con el siguiente resultado que tiene como consecuencia que los grupos encajables localmente en la clase de grupos finitos (LEF) y los grupos encajables localmente en la clase de grupos amenables (LEA) son sóficos.

**Proposición 6.5.** *Todo grupo $G$ que es localmente encajable en la clase de grupos sóficos es sófico.*

# 7 Propiedades de grupos $\mathscr{G}$-aproximables

En la sección anterior se presenta una definición de grupos sóficos que no utiliza ultrafiltros. Es una pregunta natural si es o no posible tener otra definición de grupos $\mathscr{G}$-aproximables que no use ultraproductos. En esta sección vamos a presentar dicha definición y veremos que es muy similar a la de grupos sóficos. Esta sección está basado principalmente en [19, 32, 33].

**Definición 7.1.** Sea $\mathscr{G}$ una clase de grupos, cada uno de los cuales está equipado con una pseudo función de longitud $\ell$. Un grupo $\Gamma$ tiene la propiedad de $\mathscr{G}$-aproximación si para todo $g \in \Gamma$, $g \neq 1$, existe $\delta_g > 0$ tal que para todo $\epsilon > 0$ y cualquier subconjunto finito $F \subseteq \Gamma$, $F \neq \emptyset$, existe un grupo $G \in \mathscr{G}$ y una función $\varphi\colon \Gamma \to G$ tal que:

*GA1)* $\ell(\varphi(1)) \leq \epsilon$;

*GA2)* $\ell(\varphi(g)) \geq \delta_g$, para todo $g \in F \setminus \{1\}$;

*GA3)* $\ell(\varphi(g)\varphi(h)\varphi(gh)^{-1}) \leq \epsilon$, para todo $g, h \in F$.

A la función $\varphi$ se le conoce como un $(F, \epsilon, \delta_g, \ell)$-casi-homomorfismo. Cuando no es necesario hacer referencia a $\delta_g$ y a la pseudo función de longitud $\ell$ se dice simplemente que $\varphi$ es un $(F, \epsilon)$-casi-homomorfismo.

Se asume que $\delta_g \leq 1$, para todo $g \in \Gamma$ porque de lo contrario no se cumpliría la condición (GA2).

Un grupo que tiene la propiedad de $\mathscr{G}$-aproximación se llama sófico, hiperlineal, sófico débil, sófico lineal, $K$-sófico dependiendo de quien es la clase $\mathscr{G}$ y la función de longitud de manera similar como en la definición 4.8.

Una función $\delta\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ tal que $\delta(g) > 0$, para $g \neq 1$ y $\delta(1) = 1$ se le llama *función de peso* para el grupo $\Gamma$. Notemos que en la definición de $\mathscr{G}$-aproximación se requiere que el grupo $\Gamma$ tenga una función de peso.

Otros tipos de aproximación de grupos son, la $\mathscr{G}$-aproximación discreta la cual se da al reemplazar en la definición $\delta_g$ por una constante $\delta$; y la $\mathscr{G}$-aproximación fuerte donde en la condición (GA2) se tiene $\ell(\varphi(g)) \geq diam(G) - \epsilon$ para todo $g \in F \setminus \{1\}$, en donde $diam(G) = \sup_{g \in G} \ell(g)$, y a $\varphi$ se le conoce como *casi-homomorfismo fuerte*.

No se sabe si las diferentes versiones de $\mathscr{G}$-aproximación son equivalentes de manera general. En el caso de grupos sóficos e hiperlineales dichas versiones si son equivalentes. Para el caso de grupos sóficos la equivalencia la da la proposición 5.3 y para el caso de grupos hiperlineales la equivalencia la da un resultado que se puede encontrar, por ejemplo, en la tesis de Olesen [25, proposición 5.1.2].

El siguiente resultado, bien conocido en el área, muestra la equivalencia de las definiciones de aproximación 4.7 y 7.1 lo cual implica que la definición de $\mathscr{G}$-aproximación no depende de la selección del ultrafiltro.

**Teorema 7.2.** *Un grupo $\Gamma$ tiene la propiedad de $\mathscr{G}$-aproximación según la definición 7.1 si y solo si existe un conjunto de índices $I$ y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $I$ tal que $\Gamma$ puede ser encajado en un ultraproducto $\left(\prod_{i\in I} G_i\right)_u$ de grupos $G_i \in \mathscr{G}$.*

## 7.1 Propiedades generales de grupos $\mathscr{G}$-aproximables

Se conocen pocos resultados generales para los grupos $\mathscr{G}$-aproximables. Vamos a concluir este artículo mencionando algunos de estos resultados. Se sabe que la clase de grupos con la propiedad de $\mathscr{G}$-aproximación es cerrada al tomar subgrupos y límites inversos [33, proposición 3.3]. Lo mismo es cierto para los grupos con la propiedad discreta y la propiedad discreta fuerte de $\mathscr{G}$-aproximación. Se sabe que si la clase $\mathscr{G}$ tiene una propiedad conocida como amplificación, entonces la clase de grupos $\mathscr{G}$-aproximables es cerrada al tomar límites directos [33, proposición 3.5].

Se conocen pocos resultados para el caso del producto directo de grupos $\mathscr{G}$-aproximables. Stolz demostró un resultado parcial con varias hipótesis [33, proposición 3.4]. Vamos a presentar el resultado que Derek F. Holt y Sarah Rees [19] anuncian en 2016.

Primero vamos a definir una función de longitud en el producto directo de dos grupos con función de longitud. Si $\mathscr{G}$ es una clase de grupos métricos, escribiremos $(G, \ell_G) \in \mathscr{G}$ para indicar que $G \in \mathscr{G}$ y que $\ell_G$ es una función de longitud definida en $G$.

**Proposición 7.3.** *Sea $\mathscr{G}$ una clase de grupos métricos. Supongamos que $(G, \ell_G), (H, \ell_H) \in \mathscr{G}$. Entonces para $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y $\alpha \in G \times H$ con $\mathbf{a} = (g, h)$, la función $\ell^p_{G\times H}\colon G \times H \to [0, 1]$ definida por*

$$\ell^p_{G\times H}(g,h) = \sqrt[p]{\frac{\ell_G(g)^p + \ell_H(h)^p}{2}}, \qquad p \in \mathbb{N}$$

*y*

$$\ell^\infty_{G\times H}(g,h) = \max\{\ell_G(g), \ell_H(h)\}$$

*es una función de longitud invariante.*

**Teorema 7.4.** *Sea $\mathscr{G}$ una clase de grupos con funciones de longitud invariantes asociadas y supongamos que, para algún $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ fijo, y para cualquier par de grupos $G, H \in \mathscr{G}$ se cumple que*

$$(G, \ell_G), (H, \ell_H) \in \mathscr{G} \Rightarrow (G \times H, \ell^p) \in \mathscr{G}.$$

*Entonces el producto directo $G \times H$ de dos grupos $G$ y $H$ $\mathscr{G}$-aproximables es $\mathscr{G}$-aproximable.*

El resultado de este teorema puede ser aplicado para deducir la cerradura bajo productos directos para las clases de grupos sóficos débiles, grupos LEF, grupos hiperlineales, grupos lineales sóficos, donde la condición se mantiene de la siguiente manera:

- Grupos sóficos débiles para toda $p$;
- Grupos LEF para $p = \infty$;
- Grupos hiperlineales para $p = 2$;
- Grupos lineales sóficos para $p = 1$.

Para la función de longitud de Hamming $\ell_G$, $\ell_H$, la función $\ell^p_{\ell_G, \ell_h}$ no es una función de longitud de Hamming, y por lo tanto no podemos deducir la cerradura de la clase de grupos sóficos bajo el producto directo a partir de este resultado.

Concluimos este trabajo citando los artículos de Holt y Ress [19], y de Hayes y Sale [18] en donde se pueden encontrar otras propiedades de cerradura para los grupos $\mathscr{G}$-aproximables.

**Agradecimientos**

Este artículo es parte de la tesis de licenciatura de la segunda autora bajo la dirección del primer autor. La tesis se presentó en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas en marzo del 2016. Los autores agradecen a los profesores Daniel Duarte, Patricia Jiménez, Jesús Leaños y Alexander Pyshchev por sus comentarios y sugerencias sobre la tesis, que se ven reflejados en este artículo. Los autores agradecen al editor y al revisor por sus útiles sugerencias y correcciones.

Luis Manuel Rivera Martínez
*Unidad Académica de Matemáticas*,
Universidad Autónoma de Zacatecas,
Zacatecas, México
luismanuel.rivera@gmail.com

Nidya Montserrat Veyna García
*Unidad Académica de Matemáticas*,
Universidad Autónoma de Zacatecas,
Zacatecas, México
nidyaveyna@gmail.com

## Referencias

[1] Aksoy A. G., Khamsi M. A., Nonstandard Methods in Fixed Point Theory, Springer Science & Business Media (2012).

[2] Arzhantseva G., Păunescu L., *Linear sofic groups and algebras*, Transactions of the American Mathematical Society, DOI: http://dx.doi.org/10.1090/tran/6706 (2016).

[3] Capraro V., Lupini M., Introduction to Sofic and Hyperlinear Groups and Connes' embedding conjecture, Lecture Notes in Math., **2136**, Springer (2015).

[4] Ciobanu L., Holt D. F., Rees S., *Sofic groups: graph products and graphs of groups*, Pacific J. Math., **271** (2014), 53–64

[5] Collis B., Dykema K., *Free products of sofic groups with amalgamation over monotileabe amenable groups*, Münster J. Math., **4** (2011), 101–118.

[6] Ceccherini-Silberstein T., Coornaert M., Cellular Automata and Groups, Springer (2010).

[7] Deza M., Huang T., *Metrics on permutations, a survey*, J. Comb. Inf. Sys. Sci., **23** (1998), 173–185.

[8] Elek G., Szabó E., *Sofic groups and direct finiteness*, J. Algebra, **280**(2) (2004), 426–434.

[9] Elek G., Szabó E., *Hyperlinearity, essentially free action and $L^2-$invariants, The sofic property*, Math. Ann., **332** (2005), 421–441.

[10] Elek G., Szabó E., *On sofic groups*, J. Group Theory, **9** (2006), 161-171.

[11] Elek G., Szabó E., *Sofic representations of amenable groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **139** (2011), 4285–4291.

[12] Glebsky L., *Approximation of groups, characterizations of sofic groups, and equations over groups*, arXiv: 1506.06940 (2015).

[13] Glebsky L., Rivera L. M., *Sofic groups and profinite topology on free groups*, J of Algebra, **320** (9) (2008), 3512–3518.

[14] Gordon E. I., Vershik A. M., *Groups that are locally embeddable in the class of finite groups*. St Petersburg Mathematical Journal, **9** (1998), 49–67.

[15] Gromov M., *Endomorphisms of symbolic algebraic varieties*, J. Eur. Math Soc., **1** (1999), 109–197.

[16] Gottschalk W., *Some general dynamical notions*, in: Recent Advances in Topological Dynamics, Lecture Notes Math., **318**, Springer-Verlag (1973), 120–125.

[17] Hayes B., Sale A., *The wreath product of two sofic groups is sofic*, arXiv:1601.03286 (2016).

[18] Hayes B., Sale A., *Metric approximations of wreath products*, arXiv:1608.02610 (2016).

[19] Holt D. F., Rees S., *Some closure results for $C$-approximable groups*, arXiv:1601.01836 (2016).

[20] Łoś J., *Quelques remarques, theoremes et problemes sur les classes definissables d'algebres*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, **16** (1955), 98–113.

[21] Magnus W., Karrass A., Solitar D., Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations, Courier Corporation (2004).

[22] Mal'cev A. I., *On isomorphic matrix representations of infinite groups*, Rec. Math. [Mat. Sb.]., **8**(50) (1940), 405–422.

[23] Mal'cev A. I., *On homomorphisms onto finite groups*, in A.I. Mal'cev, Selected Works, Vol 1, Clasical Algebra, 450–462. Nauka, Moscow (1976).

[24] Novikov P. S., *On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (in Russian), **44** (1955), 1–143.

[25] Olesen K. K., The Connes Embedding Problem (sofic groups and the QWEP Conjeture), Master thesis, University of Copenhagen, (2012).

[26] Păunescu L., *On sofic actions and equivalence relations*, J. Funct. Anal., **261**(9) (2011), 2461–2485.

[27] Pestov V., *Hyperlinear and sofic groups: a brief guide*, The Bulletin of Symbolic Logic, **14** (4) (2008), 449–480.

[28] Rădulescu F., *The von Neumann algebra of the non-residually finite Baumslag group* $< a, b \mid ab^3a^{-1} = b^2 >$ *embeds into* $R^\omega$, Hot Topics in Operator Theory. Theta Ser. Adv. Math., (2008), 173–185.

[29] Sapir M., *Residual properties of* 1*-relator groups*, in Groups St Andrews 2009 in Bath, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **388**, vol. 2, Cambridge University Press (2011), 324–343:.

[30] Stëpin A. M., *Approximability of groups and group actions*, Math. Surv, **38** (1983), 131–132.

[31] Stëpin A. M., *Approximability of groups and group actions, the Cayley topology*, Ergodic Theory of $\mathbb{Z}^d - Actions$. London Math Soc. Lecture Note Ser., **228**, Cambridge University Press, Cambridge (1996), 475–478.

[32] Stolz S. A., Linear Approximation of Groups and Ultraproducts of Compact Simple Groups, PhD. thesis, University Leipzig (2013).

[33] Stolz A. *Properties of linearly sofic groups*, arXiv: 1309.7830 (2013).

[34] Stolz A., Thom A., *On the lattice of normal subgroups in ultraproducts of compact simple groups*, Proc. Lond. Math. Soc., **3** (108), no.1 (2014), 73–102.

[35] Thom A., *Sofic groups and diophantine approximation*, Comm. Pure Appl. Math., **61** (2008), 1155–1171.

[36] Thom A., *About the metric approximation of Higman's group*, Journal of Group Theory, **15**(2) (2012), 301–310.

[37] Weiss, B., *Sofic groups and dynamical systems*, (Ergodic theory and harmonic analysis, -mumbai, 1999), Sankhya Ser. A, **62** (2000), 350–359.

[38] Zelenyuk Y. G., Ultrafilters and Topologies on Groups, De Gruyter expositions in mathematics (2011).