Morfismos, Vol. 26, No. 1, 2022, pp. 1–13

Los secretos de las botellas de Klein

Moira Chas

Clasificación de acuerdo al formato 2020 de la AMS: 00-01.

1 Hay más botellas de Klein en el cielo y la tierra...

Al decir "botella de Klein", la asociación que viene a muchas mentes (incluyendo a la mía, tiempo atrás) es la de la Figura 1.

Figure 1: Botella de Klein (vidrio)

Haciendo y rehaciendo botellas de Klein con alambre, hice dos descubrimientos que me sorprendieron:

1. Las botellas de Klein vienen en más formas de las que se podían soñar en mi filosofía.

2. La frase que muchas veces escuché *"La botella de Klein no tiene adentro ni afuera"* es errónea si no se agrega contexto.

En este artículo voy a contarles acerca de estos hallazgos y otras cosas que aprendí mientras hacía botellas de Klein de alambre.

Figure 2: Botella de Klein (alambre)

Nota: Pueden encontrar modelos matemáticos de alambre en mi cuenta de Instagram: *https://www.instagram.com/crochettopology/*

2 ¿Qué es una botella de Klein?

En realidad, la pregunta que voy a contestar a continuación es:

¿A qué me refiero cuando escribo "botella de Klein"?

(Este es un tipo de pregunta fundamental en la matemática: "¿Cuál es el significado de una cierta palabra o expresión?" Con esta clase de preguntas, toda discusión matemática se puede reducir —si se cuenta con tiempo suficiente— a términos extremadamente simples, y así los interlocutores suelen llegar a un acuerdo acerca de la validez de un argumento.) La respuesta explicará (espero) por qué hay botellas de Klein que se ven tan distintas a la de la Figura 1, que muchos ni las llamarían botellas de Klein.

Imaginen un juego de ordenador en una pantalla cuadrada (por ejemplo, Pac-Man) donde un personaje (o una parte de un personaje) sale de la pantalla por un lado horizontal y entra simultáneamente en el lado horizontal opuesto.

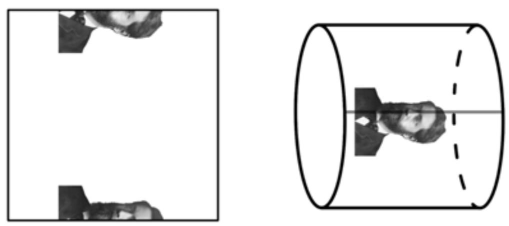

Figure 3: Felix Klein en un cilindro

El espacio donde vive el personaje (Klein, en la Figura 3) es lo que los matemáticos entendemos por superficie con frontera. Funciona como si los dos lados horizontales estuvieran pegados, punto por punto, el uno al otro, es decir, como si la superficie donde se mueve el personaje fuera un cilindro. En este caso, el cilindro tiene dos fronteras, formadas por dos círculos laterales, que corresponden a los lados de la pantalla que no se "pegan". (Sería interesante preguntarse qué pasa si se gira algunas veces el lado superior del cuadrado antes de pegarlo al lado inferior, digamos cuando los giros son completos, es decir, múltiplos de 360 grados, de forma que la cara de Klein aparezca correctamente.)

Ahora, supongamos un segundo juego de ordenador en el que cada vez que un personaje sale de uno de los lados verticales, entra simultáneamente por el lado opuesto, pero esta vez al revés.

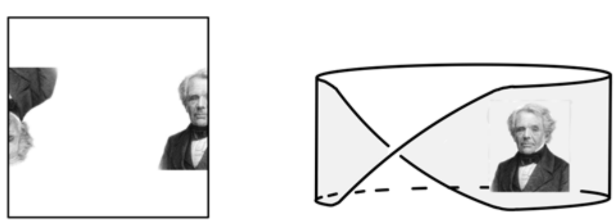

Figure 4: August Möbius en su banda

En este caso, es como si el personaje se moviera en una superficie con frontera, que conocemos con el nombre de banda de Möbius. (El personaje en la Figura 4 es Möbius.) La banda de Möbius tiene una sola frontera, porque los dos segmentos libres están pegados por los puntos en sus bordes. (Como pasó con el cilindro, el segmento se puede rotar antes de "pegar". En este caso, el ángulo de giro debe ser 180 más un múltiplo de 360, para que la imagen de Möbius aparezca apropiadamente.)

Por último, si un juego de ordenador combina las pantallas de los dos juegos anteriores, la superficie que resulta es lo que los matemáticos han dado en llamar "botella de Klein".

Figure 5: La pantalla de la botella de Klein

Podemos representar distintas maneras de pegar las aristas del cuadrado como se indica en la Figura 6, donde dos aristas del mismo color con una flecha tienen que pegarse (o, mejor dicho, convertirse en una arista) respetando el sentido de la flecha.

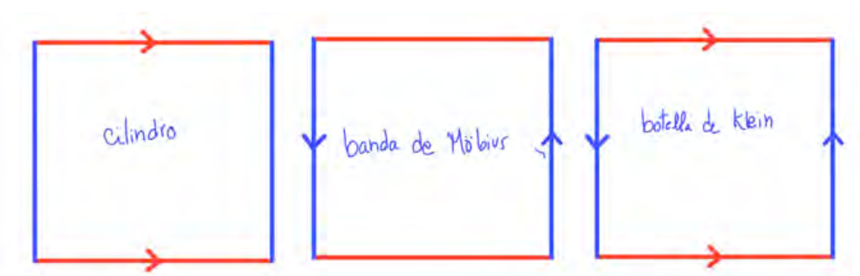

Figure 6: Instrucciones para obtener un cilindro, una banda de Möbius y una botella de Klein

En los dos primeros casos, pegando el par de lados del cuadrado del modo mencionado, se puede materializar la superficie del juego en el espacio en que vivimos, de manera tal que el objeto que construimos tiene las características esenciales de la superficie abstracta. En el caso de la banda de Möbius, es físicamente más fácil pegar, como se indica en la figura, los dos lados cortos de un rectángulo (bastante más ancho que alto), que pegar dos lados opuestos de un cuadrado. (Es posible pegar físicamente un par de lados opuestos de un cuadrado, pero este es un interesante acertijo que requiere pensar bastante. He aquí una pista para quien quiera resolverlo: hay que encontrar una manera apropiada de doblar el papel.)

En el tercer caso no se pueden pegar los dos pares de lados del cuadrado en nuestro espacio físico. Pero sí se pueden pegar, como en el juego de ordenador, en nuestra mente matemática.

La imagen de la botella de Klein que conocemos es una de las tantas maneras de representar a la botella en nuestro espacio cotidiano: empezamos por "pegar" los lados opuestos de un cuadrado formando un cilindro. Después contraemos uno de los extremos y lo hacemos pasar a través de la pared del cilindro, de modo que se encuentre con el otro extremo. Finalmente, "pegamos" los dos extremos. El paso que no ocurre en la pantalla del juego de computadora, es el pasar un extremo a través de la pared del cilindro. Este paso da lugar a una superficie que se interseca a sí misma.

La botella de Klein, el cilindro y la banda de Möbius son algunos de los espacios abstractos que viven en un mundo de ideas y formas infinitamente lejos de la vida real. Algunos de estos espacios abstractos (como el cilindro y la banda de Möbius) se pueden representar en nuestro espacio preservando muchas de sus características esenciales. Una de estas características es que el paisaje que un ser minúsculo ve en cada punto de la representación es un plano (de la misma manera que la tierra nos puede parecer plana cuando miramos alrededor de nosotros). En el caso de la botella de Klein, no existe representación tridimensional en la que las paredes no se intersequen. Esta intersección de las paredes hace que la representación no posea una de las características esenciales. Es decir, un ser minúsculo, parado en un punto donde las paredes se intersecan, no vería un plano.

Pese a las diferencias con los objetos abstractos, las representaciones nos ayudan a entender mejor los objetos matemáticos. Pero es importante recordar que estas representaciones son sombras de los objetos que viven en nuestras mentes. La botella de Klein de vidrio en la Figura 1 al principio de este texto es, en más de un sentido, una de las posibles sombras de la botella abstracta que vive en nuestra mente.

(Uno de los tantos aspectos magníficos de la matemática es acaso el hecho de que cada una de estas ideas abstractas es la misma, si nuestra mente logró comprenderla apropiadamente. Hay interpretaciones torcidas y malentendidos, las palabras a veces comunican y otras enturbian la comunicación, pero en matemática hay una esencia que compartimos. Quizás es porque le damos un contenido muy preciso —y en cierto sentido acotado— a las palabras.)

Volviendo a las sombras de la botella de Klein, como bien sabemos, las sombras cambian cuando un objeto o la luz se mueven. De la misma forma, al poner una botella de Klein en nuestro mundo real hacemos varias elecciones de cómo representarla y algunas de esas elecciones cambian la botella de Klein hasta convertirla en una desconocida. (En jerga matemática, las distintas sombras corresponden a distintas inmersiones de la botella de Klein in $\mathbb{R}^3$.) No importa cómo elijamos ponerla en nuestro espacio, las propiedades de la botella de Klein hacen que la superficie se interseque a sí misma.

Supongamos ahora que "cortamos" una botella de Klein a lo largo de la curva roja y estiramos los bordes como se indica en la Figura 7.

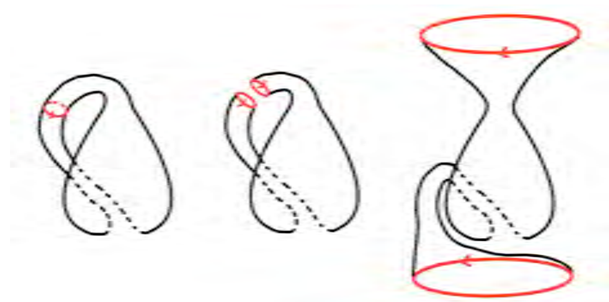

Figure 7: Cortando la botella

Si queremos recobrar la botella, debemos pegar los bordes en rojo de manera que las flechas se superpongan. Hay una forma de pegar estos bordes de manera de obtener una superficie como la de la Figura 8.

Otra manera de materializar la botella de Klein en un espacio tridimensional como el nuestro es la siguiente: en lugar de hacer un cilindro, doblamos el cuadrado en forma de "ocho" y después pegamos los bordes (que son dos figuras 8) con una rotación de 180 grados. El fantástico

Figure 8: Otra sombra

video de Jos Leys, accesible en *https://youtu.be/rnWyTRpmzKQ,* ilumina este procedimiento, mientras que la segunda imagen en la Figura 9 muestra el resultado.

Figure 9: Sombras de la botella de Klein. La primer imagen es un modelo de Carlo Séquin

Podemos también visualizar la botella de Klein - figura ocho comenzando por el diagrama de la Figura 10, "pegando" las aristas rojas a través de la mediana del cuadrado (en rosa en la figura), y después "pegando" las aristas azules con un giro de 180 grados.

La botella de Klein de Lawson que vemos en la primera ilustración de la Figura 9 es a la botella - figura ocho (en la segunda ilustración de la

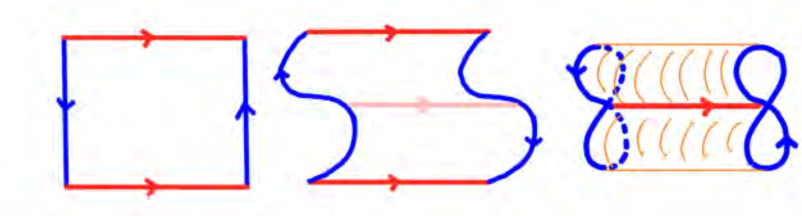

Figure 10: Botella de Klein - figura ocho

Figura 9) como la botella clásica es a la ilustrada en la Figura 8. Lawson descubrió su versión (inmersa en una esfera de tres dimensiones) en su tesis de doctorado [3]. Según cuenta Gregorio Franzoni en [2], la primera ilustración de la botella - figura ocho se debe a Thomas Banchoff [1].

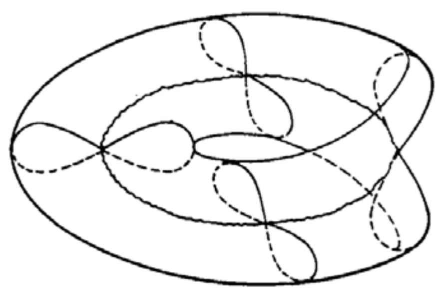

Figure 11: Ilustración de Banchoff de la botella de Klein - figura ocho.

3 ¿Sin adentro y sin afuera?

Una superficie, desde el punto de vista matemático, es un espacio abstracto que puede ser obtenido por un procedimiento análogo al de las pantallas del juego de computadora que describimos antes. Por ejemplo, una pantalla con dos lados pegados como indica la Figura 12 daría lugar a un espacio que podríamos describir como una pelota triangular.

Esta pelota (y cualquier otra que no esté pinchada) separa el espacio en dos partes, un lado adentro y otro afuera. Esta idea de los "lados" está necesariamente asociada al hecho de que estamos pensando a las superficies como parte de un espacio tridimensional, de la misma manera que un círculo en una hoja de papel divide la hoja en dos sectores, y

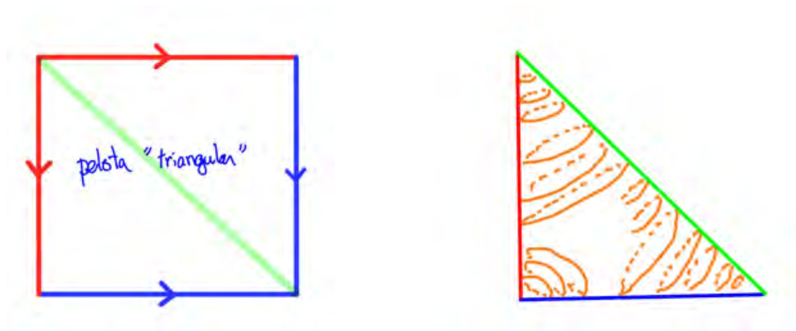

Figure 12: Pelota triangular

podemos distinguir dos lados a lo largo del círculo. (El hecho de que toda curva cerrada que no se cruza a sí misma divide una hoja de papel en dos sectores, es un teorema no tan sencillo de demostrar.) Si en lugar de pensar nuestro círculo en un plano, lo pensamos flotando en el espacio tridimensional, ya no hay lados que podamos distinguir. Es decir, para hablar de adentro y afuera es necesario tener un espacio de dimensión n dentro de otro espacio de dimension $n + 1$... Es necesario, pero no suficiente.

Volviendo a nuestra pelota, vemos que tiene dos lados, uno que está en contacto con la parte de afuera y el otro, con la parte de adentro. Entonces, una flecha minúscula parada en uno de los puntos de la pelota puede apuntar hacia adentro o hacia afuera. Si movemos la flecha permitiéndole tocar a la pelota solamente en el punto en el que está parada, no podemos cambiar su estado inicial: si al comenzar apunta hacia un lado (adentro o afuera), seguirá para siempre apuntando hacia el lado inicial. En la botella de Klein hay caminos (curvas cerradas) que al recorrerlos hacen que la flecha termine en dirección opuesta a la que empezó. Les propongo a ustedes que traten de encontrar tales caminos en la banda de Möbius y en la botella de Klein. El hecho de que esos caminos existan, hace que estas dos superficies tengan "un solo lado". (En ambos casos, es más complicado pensar el adentro y el afuera que determinan, porque la banda de Möbius tiene frontera y la botella de Klein, en nuestro espacio tridimensional, se autointerseca).

Otra manera de expresar esta idea es pensando un reloj que puede moverse "insertado" en la botella, y que después de vagabundear por su superficie vuelve al lugar inicial con las agujas girando en la dirección contraria a la usual.

4 De cómo la curiosa superficie se convirtió en botella

> *"¿Qué hay en un nombre?*
> *Lo que llamamos rosa, con cualquier otra palabra olería igual de dulce".*
> *"¿Qué hay en un nombre?*
> *Lo que llamamos botella de Klein, con cualquier otra palabra parecería igualmente no-orientable".*

En 1882 Klein publicó *Über Riemann's Theorie der Algebraischen Funktionen und ihre Integralen,* un texto basado en clases que había dado poco tiempo atrás. (El texto también fue publicado en inglés *On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals,* de la editorial Cambridge, Macmillan and Bowes, 1893, disponible del enlace *https://www.gutenberg.org/ebooks/36959*).

UEBER RIEMANN'S THEORIE

DER

ALGEBRAISCHEN FUNCTIONEN

UND IHRER INTEGRALE.

EINE

ERGÄNZUNG DER GEWÖHNLICHEN DARSTELLUNGEN.

VON

FELIX KLEIN,

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

Figure 13: Cubierta del libro de Klein

En este libro se encuentra la primera descripción de lo que hoy llamamos "botella de Klein". La descripción que aparece en el capítulo en el que Klein habla de superficies que tienen "un solo lado" y carecen de fronteras dice lo siguiente:

"Una idea de ellas puede formarse volviendo del revés un extremo de un trozo de tubo de caucho y haciéndolo pasar a través de sí mismo de modo que la superficie exterior de un extremo se encuentre con la superficie interior del otro."

En 1928 aparece la primera ilustración de la botella en un libro de Klein:

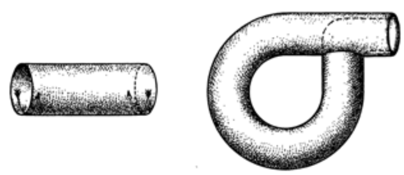

Figure 14: Primera visualización de la botella de Klein

Una nota al pie de página (probablemente del editor del libro) en esa publicación dice: *"Esta superficie ha sido dada por Klein como el primer ejemplo de superficie cerrada con un solo lado, por lo que la llamaremos tubo de Klein".* (Kleinschen Schlauch, Schlauch significa tubo en alemán).

Las superficies suelen recibir el nombre de sus descubridores (cuando hay más de uno, el azar, el poder y otras razones extra-matemáticas eligen uno). Por ejemplo, la superficie de Kummer, la superficie de Caley (hay más de una), la superficie de Clebsch, la superficie de Costa y la superficie de Boy.

Figure 15: Superficie de Kummer. Modelo del catálogo de Schilling, ejecutado bajo la dirección de Felix Klein. La foto fue tomada por personal del Departamento de Geometría de la Universidad de Karazin, Ukrania, y se encuentra disponible en el enlace http://touch-geometry.karazin.ua/m/kummer-surface-with-4-real-double-points

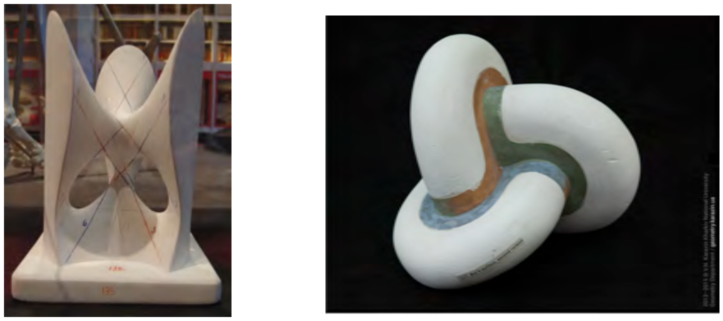

Figure 16: Izquierda: Superficie de Clebsch, foto Wikipedia, archivo: Modell der Diagonalfläche von Clebsch - Schilling VII, 1 - 44-.jpg. Derecha: Superficie de Boy, modelo del catálogo de Schilling, ejecutado por W. Boy bajo la dirección de Hilbert con ayuda de Schilling. La foto fue tomada por personal del Departamento de Geometría de la Universidad de Karazin, Ukrania, y se encuentra disponible en el enlace http://touch-geometry.karazin.ua/m/symmetric-boy-surface

Unos años más tarde, cuando se publica (en alemán) el libro *"Geometría y la Imaginación"* de Hilbert y Cohn Vossen, los autores se refieren a la botella como "el tubo de Klein" y también como "superficie de Klein" (Kleinsche Fläche, Fläche en alemán significa superficie).

En 1952 aparece la primera traducción del libro de Hilbert y Cohn Vossen al inglés. Y ahí es cuando la botella es bautizada. Las palabra botella (Flasche) y la palabra superficie (Fläche) son muy parecidas. La frase de Hilbert-Cohn Vossen "Esta construcción nos da la superficie de Klein" está traducida como "Esta construcción nos da la superficie de Klein, también llamada botella de Klein."

Nos despedimos con una ilustración que muestra cómo "pegando" la frontera de dos bandas de Möbius se obtiene una botella de Klein.

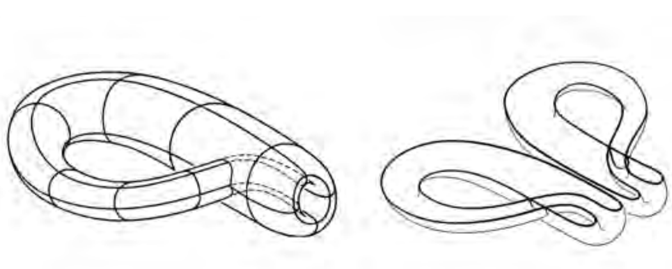

Figure 17: La botella de Klein es unión de dos bandas de Möbius

Moira Chas
Department of Mathematics,
Stony Brook University
Stony Brook, NY 11794
moira.chas@stonybrook.edu

References

[1] Banchoff, Thomas F., *Minimal submanifolds of the bicylinder boundary*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática – Bulletin/Brazilian Mathematical Society **7**(1) (1976) 37–57.

[2] Franzoni, Gregorio, *The klein bottle: Variations on a theme*, Notices of the AMS **59**(8) (2012) 1094–1099.

[3] Lawson Jr, H Blaine, *Complete minimal surfaces in S^3*, Annals of Mathematics **92** (1970) 335–374.