

Índice cromático circular, snarks y extensiones de la familia de Blanuša tipo 1 *

Ma. Guadalupe Rodríguez Sánchez ¹
J. Jesús Rodríguez Martínez ²

Resumen

El índice cromático circular $\chi'_c(G)$ es un parámetro asociado a las aristas de una gráfica G . Éste puede verse como un refinamiento del índice cromático $\chi'(G)$. En este trabajo, se hace una revisión de ciertas familias infinitas de gráficas para las cuales χ'_c es conocido. Se tratan ampliamente los snarks, así como sus índices cromáticos circulares. Se construye una extensión de las familias de los snarks de Blanuša tipo 1, introduciendo el concepto de pegado de bloques básicos de construcción por medio de trayectorias. Se da una cota para los índices cromáticos circulares asociados a los snarks extendidos.

2010 Mathematics Subject Classification: 05C15, 05C76.

Keywords and phrases: Número cromático, índice cromático, número cromático circular, índice cromático circular, snark.

1 Introducción

Una gráfica es una pareja $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito de vértices y E un subconjunto de $V \times V$, a los elementos de E se les llama aristas. Los vértices serán representados por puntos y las aristas por líneas que unen pares de vértices. En este trabajo se consideran gráficas finitas simples.

*Este artículo desarrolla algunas ideas centrales de la tesis de maestría del autor (2) dirigida por la autora (1), en el Posgrado de Optimización de la Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco. La tesis se presentó el 25 de febrero de 2016.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica. Una coloración propia de las aristas de G , es una función $c : E \rightarrow S$, donde S es un conjunto de k colores $\{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, tal que $c(e_1) \neq c(e_2)$ si e_1 y e_2 son aristas adyacentes. Se dice que G es k -coloreable, si existe una coloración propia de las aristas de G con k colores. Al entero más pequeño k , para el cual G es k -coloreable, se le denomina índice cromático de G y se denota por $\chi'(G)$.

En el año de 1988, Vince [21] introdujo un nuevo parámetro para la coloración de los vértices de una gráfica, bajo el nombre de *star coloring*. Este puede verse como una generalización de la coloración propia y se le denomina actualmente *coloración circular*. Una aplicación de este concepto es la asignación de tiempos a los semáforos de un cruce de vehículos, ver [19]. El índice cromático circular es una generalización natural del índice cromático de una gráfica. Su definición es una extensión de la definición de la coloración circular por vértices, ver [15, 24].

En la sección 2 se definen los conceptos fundamentales que se usan en este trabajo, como el índice cromático circular $\chi'_c(G)$ de una gráfica G , algunas propiedades del mismo y cotas que facilitan el cálculo de $\chi'_c(G)$ para una gráfica o familia de gráficas. En la sección 3, se presenta un resumen de las familias de gráficas para las cuales se conoce su coloración circular por aristas, dedicando una buena parte de la sección al estudio de las coloraciones de snarks. En la sección 4 se construye una extensión de los snarks de la familia de Blanuša tipo 1, introduciendo el concepto de pegado de gráficas por medio de trayectorias de longitud s . Se da una cota para $\chi'_c(G)$, si G es un elemento de la familia de los snarks de Blanuša tipo 1 extendidos. Además, se plantean los snarks de Goldberg como pegados de gráficas C_5 mediante trayectorias de tamaño 2. Por último, en la sección 5, se plantea el cálculo de una (l, d) -coloración circular mediante un conjunto de desigualdades que conforman el poliedro de un problema de programación lineal entera.

2 Índice cromático circular

Se presentan dos definiciones equivalentes del índice cromático circular de una gráfica, así como algunas propiedades fundamentales de este parámetro.

Definición 2.1. Sean k, d enteros positivos, tal que $k \geq 2d$. Una (k, d) -coloración de las aristas de una gráfica $G = (V, E)$ es una función $c : E \rightarrow S$, donde S es el conjunto $\{0, \dots, k-1\}$ de colores, tal que

$d \leq |c(e_1) - c(e_2)| \leq k - d$, si e_1 y e_2 son aristas incidentes. El índice cromático circular $\chi'_c(G)$, es el ínfimo de los $\frac{k}{d}$ tal que G tiene una (k, d) -coloración de sus aristas.

En la segunda definición de índice cromático circular $\chi'_c(G)$, a las aristas se les asigna intervalos unitarios en lugar de colores. Una demostración de la equivalencia de las definiciones 1 y 2, la cual se da a continuación, se encuentra en [24].

Definición 2.2. Sea $G = (V, E)$ una gráfica, $r \geq 2$ un número real y sea C^r un círculo de perímetro r . Una r -coloración circular de las aristas de G es una asignación c de arcos abiertos unitarios de C^r a las aristas de G tal que para cualesquiera dos aristas adyacentes e_1 y e_2 , los arcos asociados $c(e_1)$ y $c(e_2)$ son disjuntos. Se dice que la gráfica G es r -coloreable, si existe una r -coloración circular de G . El índice cromático circular $\chi'_c(G)$, es el ínfimo de los r tal que G tiene una r -coloración circular de sus aristas.

Si se corta la circunferencia de C^r en cualquier punto se obtendrá un intervalo de longitud r isomorfo a $[0, r)$. Se asocia 0 con el punto de corte y se considera a la circunferencia orientada de acuerdo con el sentido de las manecillas del reloj. Si las aristas de una gráfica G tienen una r -coloración circular, se define una función biyectiva $c'_r : E \rightarrow [0, r)$. Para cada intervalo $c_r(e)$ en C^r , se asigna $c'_r(e)$ a su punto inicial. Entonces para todas las aristas e_1, e_2 incidentes en G se cumple que $1 \leq |c'_r(e_1) - c'_r(e_2)| \leq r - 1$.

En la figura 1, se presentan de izquierda a derecha, un ciclo C_5 con una etiquetación de sus aristas, usando las etiquetas se exhibe una 2.5-coloración en $C^{2.5}$ y una coloración de las aristas de C_5 vista en el intervalo $[0, 2.5)$.

Se puede demostrar que el valor del ínfimo en las dos definiciones es alcanzable, que $\chi'_c(G)$ es un número racional y que $\chi'_c(G)$ es un refinamiento de $\chi'(G)$, así $\chi'(G)$ puede verse como una aproximación de $\chi'_c(G)$, ver [15, 16], así el concepto r -coloreable generaliza el concepto de k -coloreable en una coloración propia de las aristas de una gráfica G . Es importante mencionar algunas propiedades y cotas de $\chi'_c(G)$. Si H es una subgráfica de G , se tiene que $\chi'_c(H) \leq \chi'_c(G)$. Una cota para el índice cromático circular de G se obtiene al observar que k puede restringirse al número de aristas en G y d al tamaño del apareamiento máximo α' en G . Así, se cumple que $\frac{|E(G)|}{\alpha'(G)} \leq \chi'_c(G)$, para una demostración, ver [10].

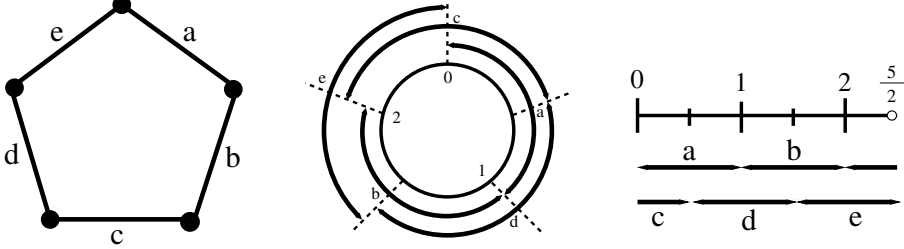


Figura 1: C_5 , una 2.5-coloración circular de C_5 vista en la círculo $C^{2.5}$ y una $[0, 2.5)$ -coloración circular de C_5 en el intervalo $[0, \frac{5}{2})$.

Dado que $\chi'_c(G)$ es un refinamiento de $\chi'(G)$ se tiene la desigualdad $\chi'_c(G) \leq \chi'(G)$. Para el número cromático circular, Zhu [24] demostró que $\chi(G) - 1 < \chi_c(G)$, de manera análoga se obtiene una cota inferior para $\chi'_c(G)$, es decir, $\chi'(G) - 1 < \chi'_c(G)$.

Sea $\Delta(G)$ el grado máximo de los vértices de una gráfica G . Usando el teorema de Vizing para la coloración de las aristas de G , se sabe que $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$, dando lugar a la clasificación usual en dos clases: una gráfica G es de clase 1 si $\Delta(G) = \chi'(G)$ y es de clase 2 si $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Trasladando los conceptos al índice cromático circular de G , se cumple que si G es de clase 1 entonces $\chi'_c(G) = \Delta(G)$ y si G es de clase 2, $\Delta(G) < \chi'_c(G) \leq \Delta(G) + 1$. Así, si G es de clase 2, o bien $\chi'_c(G) = \Delta(G) + 1$ ó $\chi'_c(G) < \chi'(G)$.

Respecto a las complejidades computacionales relacionadas con $\chi'_c(G)$, se sabe que es NP-duro encontrar el χ'_c de una gráfica simple. Además, el problema de decidir si $\chi'_c(G) = \chi'(G)$ para una gráfica G es NP-duro [16].

3 Familias de gráficas para las cuales se conoce su índice cromático circular

Se presentan los índices cromáticos circulares de algunas de las familias de gráficas para las cuales χ'_c es conocido. En particular resultan interesantes las familias de gráficas para las cuales $\chi'_c(G) < \chi'(G)$.

3.1 $\chi'_c(G)$ de algunas familias de gráficas

Se dice que una gráfica G es de clase $2a$, si $\chi'_c(G) < \chi'(G)$ y que G es de clase $2b$ si $\chi'_c(G) = \chi'(G) = \Delta(G) + 1$. Se presenta dos tablas de familias de gráficas con su índice cromático circular $\chi'_c(G)$. La Tabla 1, se refiere a gráficas de clase $2b$ y la Tabla 2, a gráficas de clase $2a$, ver [15].

Gráficas G de clase $2b$	$\chi'_c(G)$
Ciclo C_3	3
Ciclos C_{2k}	2
Gráficas completas K_n	n

Tabla 1: Índice cromático circular de familias de gráficas de clase $2b$.

Se definen dos familias de gráficas para las cuales su índice cromático circular es conocido, ver [16]. En la siguiente subsección se tratarán con detenimiento varias familias de gráficas cúbicas, no planas, llamadas snarks.

Definición 3.1.1. Las ruedas multijeje $W_{p,q}$ se obtienen del ciclo C_{p-1} , con vértices v_0, \dots, v_{p-2} , se agregan q vértices u_0, \dots, u_{q-1} y las aristas entre v_i y u_j para todo $i = 0, \dots, p-2$, $j = 0, \dots, q-1$.

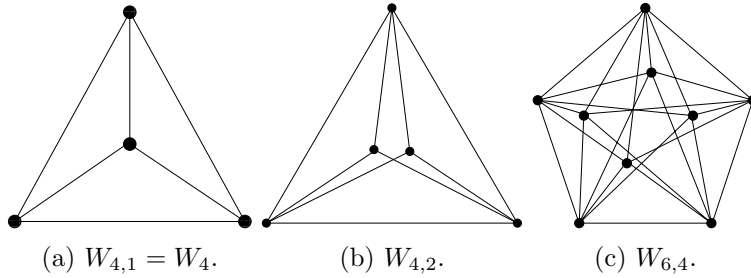


Figura 2: Ruedas multijeje.

Definición 3.1.2. La gráfica $N_p = (V_p, E_p)$ es llamada collar y se obtiene uniendo p elementos conocidos como diamantes, ver la figura 3(a). El conjunto de vértices es $V_p = \{a_i, b_i, c_i, d_i : i = 1, \dots, p\} \cup \{v\}$, y el conjunto de aristas es $E_p = \{a_i b_i, a_i c_i, b_i c_i, b_i d_i, c_i d_i, d_i a_{i+1} : i = 1, \dots, p\} \cup \{v a_1\}$, donde $a_{p+1} = v$. Se denotan los diamantes de N_p como D_i para $i = 1, \dots, p$. Ver la figura 3(b).

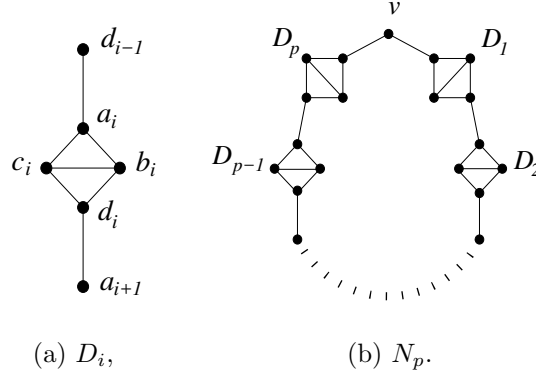


Figura 3: Diamante y collar.

Gráficas G de clase $2a$	$\chi'_c(G)$
Ciclos C_{2k+1}	$2 + \frac{1}{k}, k > 1$
Ruedas Multieje $W_{p+1,p-1}$	$p + 1 + \frac{1}{p-1}$
Collares N_p	$3 + \frac{1}{p}$
Gráfica de Petersen	$3 + \frac{2}{3}$
Snark J_3	$\frac{7}{2}$
Snark J_5	$\frac{17}{5}$
Snark J_{2k+1}	$\frac{10}{3}, k > 2$

Tabla 2: Índice cromático circular de familias de gráficas de clase $2a$.

Es importante observar que calcular el índice cromático circular de una gráfica G es equivalente a calcular el número cromático circular de la gráfica de líneas de G . Por otro lado, aplicando el teorema de Vizing, se sabe que si G es una gráfica cúbica, $3 \leq \chi'(G) \leq 4$. Zhu [24] planteó la pregunta: ¿existe una gráfica cúbica, sin puentes cuya gráfica de líneas tenga número cromático circular igual a 4?. Ahora se sabe que la respuesta es negativa, pues en [1] se demuestra que para una gráfica cúbica sin un puente G , se cumple que $\chi'(G) \leq \frac{11}{3}$. En el otro extremo del intervalo $(3, 4]$, se han encontrado familias de gráficas con índice cromático circular muy cercano a 3.

3.2 Snarks

En esta sección se da una definición de *snark*, la cual aparece en el artículo de Martin Gardner [4], quien acuñó el término snark para este

tipo de gráficas, haciendo alusión a la caza de estas estructuras más bien escasas en el universo de las gráficas.

Definición 3.2.1. Un *snark* es una gráfica cúbica, sin puentes, que no tiene una 3-coloración de sus aristas. [4].

Los snarks adquirieron relevancia por su relación con el teorema de los cuatro colores. Se dice que una gráfica cúbica tiene una *coloración de Tait* si existe una 3-coloración propia de sus aristas. Tait afirmó que una gráfica plana, cúbica y 3-conexa es Tait coloreable si y sólo si sus caras son 4-coloreables. En forma dual, se puede afirmar que toda gráfica plana es 4-coloreable por vértices si y sólo si es Tait coloreable. Así, la presencia de una gráfica plana, cúbica, conexa, sin puentes y sin una coloración de Tait, sería un contraejemplo al teorema de los cuatro colores, ver [4].

Existen gráficas cúbicas no planas, cuyo índice cromático es 4. En 1891, la gráfica de Petersen fue la primera gráfica conocida sin una coloración de Tait, así se convirtió en el snark con el menor número de vértices. Cerca de 50 años más tarde aparecieron Blanuša en 1946, con 18 vértices y Descartes en 1948, con 210 vértices. El cuarto snark en conocerse fue Szekeres en 1973, con 50 vértices. En 1975, Isaacs [11], agrupó a las gráficas de Blanuša, Descartes y Szekeres en una familia que llamó *BDS*. En este artículo también aparece un snark con 30 vértices que no pertenece a la familia *BDS* y que se le conoce como *la estrella doble*.

Hay dos aspectos que se deben mencionar antes de continuar con la exposición sobre snarks. El primero es acerca de las definiciones dadas por otros autores y el segundo se refiere a las coloraciones de snarks, desde el punto de vista del refinamiento de las coloraciones propias por aristas, que son las coloraciones cromáticas circulares.

En [3] se define un snark como una gráfica cúbica con número cromático 4. En [12] se dice que un snark es una gráfica cúbica no trivial cuyas aristas no pueden ser coloreadas propiamente con 3 colores. En [13] se encuentra la siguiente definición: un snark es una gráfica cúbica, cíclicamente 4-arista conexa, sin puentes, con cuello al menos 5 y tal que $\chi'(G) = 4$.

En la tercera definición del párrafo anterior, se menciona que un snark debe ser una gráfica cúbica, cuyo cuello sea al menos 5. Se sabe que toda gráfica cúbica G siempre contiene un ciclo. Si G tiene cuello 3, entonces G contienen un triángulo, denótese éste por T . En una coloración normal por aristas, un triángulo puede sustituirse por un

vértice y viceversa, sin alterar la coloración. Sea T formado por los vértices a , b y c . La gráfica G puede transformarse en una gráfica G' si se sustituye a T por un vértice V adyacente a los vértices A , B y C , que son vecinos de los vértices a , b y c , como se muestra en la Figura 4. Cuando se considera para G una coloración de sus aristas, se puede ver que la coloración de G se hereda a G' y viceversa en forma directa. En la figura 4, se consideran las aristas de G con tres colores asignados: α , β y γ , los cuales se preservan en la gráfica G' .

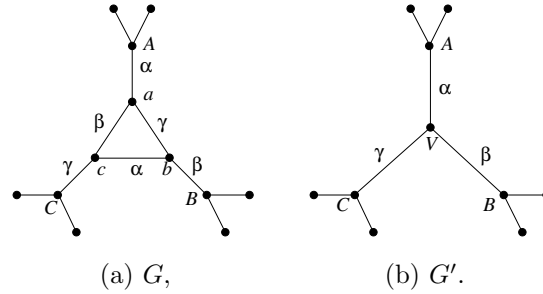


Figura 4: Sustitución de un triángulo por un vértice y viceversa, conservando una coloración normal de aristas.

En la definición en [12], se dice que un snark no debe ser trivial, entendiendo como trivial a un snark que se puede obtener de otro por operaciones simples. Con la condición de 4-conexidad cíclica por aristas, se desea evitar que un 3-corte divida a la gráfica en dos componentes, de manera que se tome una de ellas obteniéndose un snark más pequeño. En este trabajo se seguirá a Nadela y Skoviera [3], quienes sugieren dejar la definición de snark lo más abierta posible, así un snark es una gráfica cúbica que no tiene una 3-coloración de sus aristas.

Dado que el índice cromático χ'_c de un snark G es 4, se tiene que $|\chi'_c(G)| \leq 4$. En [1], se demostró que si G es una gráfica cúbica sin puentes $|\chi'_c(G)| \leq \frac{11}{3}$, razón por la cual resulta de gran interés estudiar el índice cromático circular de familias de snarks. La cuestión de trivialidad de la coloración cromática circular de snarks, cambia respecto a una coloración normal de aristas. Si G es un snark que contiene un triángulo, con $\chi'_c(G) = \frac{k}{d}$, para G' obtenida sustituyendo el triángulo por un vértice, no necesariamente se preserva la coloración cromática circular. En sentido opuesto, si G' tiene una (k, d) -coloración cromática circular, esta se hereda a la gráfica G , así en el intercambio de G con G' hay un lado que no es directo. Esta situación se muestra más adelante,

en el ejemplo 3.1.

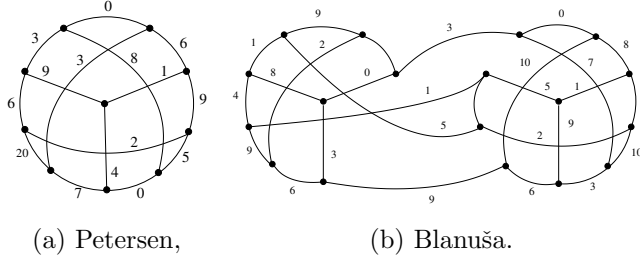


Figura 5: Gráficas con una $(11, 3)$ -coloración de aristas.

Para algunos snarks se conoce su índice cromático circular χ'_c o bien una cota para el mismo. Para la gráfica de Petersen se sabe que χ'_c es igual a $\frac{11}{3}$ [10]. En la figura 5 inciso a) se muestra la gráfica de Petersen con 9 vértices en un circuito y el vértice restante en el interior del circuito, en esa figura puede apreciarse una $\frac{11}{3}$ -coloración circular de sus aristas. La gráfica de Blanuša se forma combinando dos gráficas de Petersen mediante la operación producto punto [11], que consiste en remover cualesquiera dos aristas no incidentes de la primera gráfica de Petersen y dos vértices adyacentes de la segunda y unir cada vértice de grado 2 de la primera con un vértice de grado 2 de la segunda mediante una arista. En la figura 5, inciso b) se exhibe la gráfica de Blanuša. Se muestra una $\frac{11}{3}$ -coloración circular de sus aristas, que se obtuvo manteniendo la coloración circular de las aristas de la gráfica de Petersen de la figura 5 a), aunque es posible refinar la coloración dado que el índice cromático circular de Blanuša es $\frac{10}{3}$, [14].

Se conocen familias infinitas de snarks para las cuales se ha calculado su índice cromático circular. Una de ellas, que ya aparece en el artículo de R. Isaacs [11], es la conocida como la *familia de flores* $\{J_k\}$, que se define en seguida.

Definición 3.2.2. Una familia infinita de gráficas $\{J_k\}$, con $k \geq 3$, k impar, es conocida como la *familia de flores*. J_k se define por un conjunto de $4k$ vértices $V(J_k) = \{v_1, \dots, v_k\} \cup \{u_1^1, u_1^2, u_1^3, \dots, u_k^1, u_k^2, u_k^3\}$, que forman dos ciclos $(u_1^2, \dots, u_k^2, u_1^3, \dots, u_k^3)$, (u_1^1, \dots, u_k^1) y donde cada vértice v_i es adyacente a u_i^1, u_i^2 y u_i^3 para $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Ver Figura 6.

Los índices cromáticos circulares de la familia de flores son: $\chi'_c(J_3) = \frac{7}{2}$, $\chi'_c(J_5) = \frac{17}{5}$ y $\chi'_c(J_k) = \frac{10}{3}$ para k impar y $k \geq 7$, ver [6].

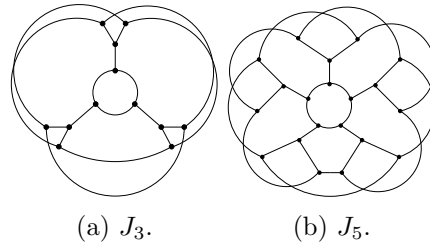
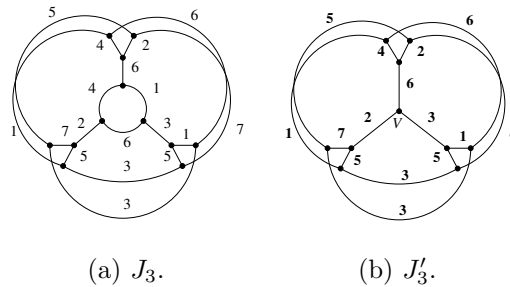


Figura 6: Familias de flores

Dado que los bloques de construcción de los snarks que se han mencionado involucran gráficas de Petersen, Tutte conjeturó que toda gráfica cúbica sin puentes de clase 2 contiene una subgráfica homeomorfa a la gráfica de Petersen, ver [20].

Ejemplo 3.1. Considérese el snark J_3 , con una $(7, 2)$ -coloración cromática circular dada, ver la figura 7(a). Sea T el triángulo contenido en J_3 , si T se sustituye por un vértice V , el snark que se obtiene es la gráfica de Petersen que se muestra en la figura 7(b). La $(7, 2)$ -coloración no se puede conservar, ya que la gráfica de Petersen tiene índice cromático circular $\frac{11}{3}$. Si se asignan los colores a las aristas incidentes a V como en la figura 4, se produce una inconsistencia en la coloración, como puede observarse con los colores 2 y 3, en la figura 7(b)).

Figura 7: Una $\frac{7}{2}$ -coloración y una inconsistencia.

Después de más de una década desde la aparición de la familia de flores, en 1981 se presentó una nueva familia infinita de snarks, cuyos elementos son conocidos como *Snarks de Goldberg*.

3.2.1 Snarks de Goldberg

Estos snarks se dividen en dos subfamilias denotadas como G_k y TG_k , los snarks de Goldberg y los snarks Torcidos de Goldberg, respectivamente. Sus índices cromáticos circulares fueron publicados en 2007 por Ghebleh [7].

Definición 3.2.3. Se define un snark de Goldberg G_k de la siguiente manera: Para todo $k \geq 3$ impar, $V(G_k) = \{v_j^t \mid 1 \leq t \leq k, 1 \leq j \leq 8\}$, con las adyacencias de los vértices como se muestra en la figura 8a). El subíndice t se considera módulo k .

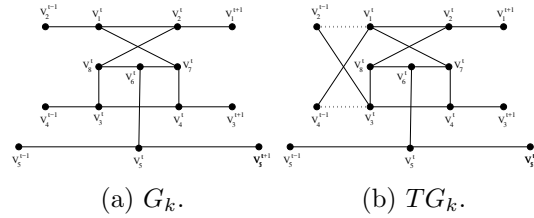


Figura 8: Bloques de los snarks de Goldberg.

Definición 3.2.4. Para todo k impar, se define el snark Torcido de Goldberg TG_k considerando $V(G_k)$ como en el snark de Goldberg y reemplazando las aristas $v_2^{t-1}v_1^t$ y $v_4^{t-1}v_3^t$ con las aristas $v_2^{t-1}v_3^t$ y $v_4^{t-1}v_1^t$. Ver la figura 8b).

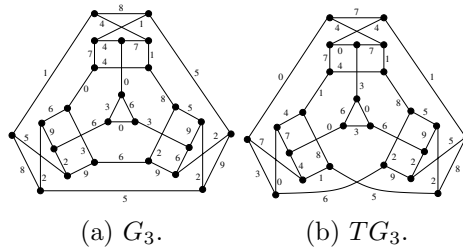


Figura 9: Una $(10, 3)$ -coloración circular de las aristas.

Si en TG_k el número de torcimientos es par se obtiene una gráfica isomorfa a G_k , si es impar la gráfica es propiamente TG_k . En [16] se demostró que $\chi'_c(G_{2s+1}) \leq \frac{7}{2}$, para todo entero positivo s . En 2007 Ghebleh [7], obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 3.2. [7] Para cada $k \geq 3$ impar, se tiene:

$$\chi'_c(G_k) = \chi'_c(TG_k) = \begin{cases} 3 + \frac{1}{3} & \text{si } k = 3 \\ 3 + \frac{1}{4} & \text{si } k \geq 5. \end{cases}$$

Los pasos fundamentales en la demostración del teorema son: se muestra una $(10, 3)$ -coloración circular de las aristas de G_3 y TG_3 , ver la figura 9. En la figura 10, se exhibe una $(13, 4)$ -coloración circular de G_7 . Se puede observar que al suprimir los dos últimos bloques en la figura, se obtiene una $(13, 4)$ -coloración circular de G_5 . Considérese G_k con k impar, $k > 5$, los dos bloques en el área marcada de la figura 10 pueden ser repetidos $\frac{k-5}{2}$ veces para obtener una $(13, 4)$ -coloración circular de G_k , a partir de G_5 . Ver [7].

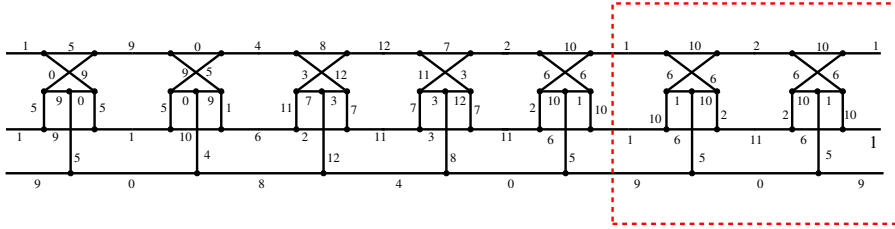


Figura 10: G_k con $k \geq 5$, con una $(13, 4)$ -coloración circular.

Otras familias para las cuales se conocen sus índices cromáticos circulares son los *snarks tipo Blanuša*, o snarks generalizados tipo Blanuša. Estos se dividen en dos tipos 1 y 2, denotados respectivamente como B^1 y B^2 .

Los snarks en B^2 se construyen uniendo gráficas de Petersen por medio de la operación producto punto, ya mencionada y que puede consultarse ampliamente en [11, 8, 23]. B_n^2 denota a la familia de snarks con n gráficas de Petersen utilizadas en su construcción y que pertenece a la familia de snarks B^2 . En 2007 Ghebleh [8], calculó el índice cromático circular de los elementos de B_n^2 . En dicho artículo, se encuentra el siguiente teorema, así como su demostración.

Teorema 3.2.5. Para todo $n \geq 1$,

$$\chi'_c(B_{n+1}^2) = 3 + \frac{1}{\lfloor 1 + \frac{3n}{2} \rfloor} = \begin{cases} 3 + \frac{2}{3n+1} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 3 + \frac{2}{3n+2} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

La familia B^1 de *Snarks Blanuša tipo 1*, fue introducida por Watkins en 1989. Se presenta en una sección especial.

3.2.2 Snarks de Blanuša tipo 1

La familia de Blanuša generalizada de tipo uno denotada por B_m^1 está dada por el pegado de manera circular de m bloques fundamentales como el que se muestra en la figura 11. Al primer bloque se le pega una arista uv y en seguida se pegan los $m - 1$ bloques restantes en forma circular, ver figura 12. Las figuras 11 y 12, fueron tomadas de la referencia [14]. Para esta familia se conoce su índice cromático circular, el cual es muy cercano a 3.

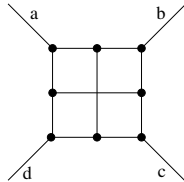


Figura 11: Bloque fundamental de B_m^1

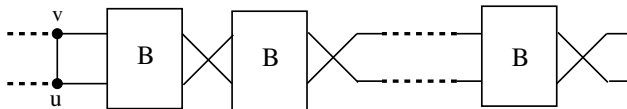


Figura 12: Pegado de bloques para formar un snark Blanuša tipo 1

Las gráficas B_m^1 forman la familia de snarks de Blanuša tipo 1, para m entero positivo. En [14] se demuestra que los elementos de B_m^1 son snarks y que $\chi'_c(B_m^1) \leq \frac{10}{3}$ para toda $m \geq 2$. Si $m = 1$, B_1^1 es una gráfica isomorfa a la gráfica de Petersen. El índice cromático circular de los elementos de B_m^1 , se enuncia en el siguiente teorema, ver [14].

Teorema 3.3. *El índice cromático circular de los elementos en B_m^1 es $3 + \frac{2}{3m}$.*

La siguiente tabla, resume los índices cromáticos de las familias de snarks, que han sido caracterizados desde 1981 hasta finales de la primera década de este siglo.

Familias de Snarks	χ'_c
Goldberg: G_k, TG_k	$3 + \frac{1}{4}$ si $(k \geq 5, k \text{ impar})$
Blanuša tipo 1: B_m^1	$3 + \frac{2}{3m}$
Blanuša tipo 2: B_{n+1}^2	$3 + \frac{1}{\lfloor 1 + \frac{3n}{2} \rfloor}$

Tabla 3: Índice cromático circular de familias de gráficas que fueron calculados después de 1975.

4 Familia de snarks Blanuša tipo 1 extendidos

El material de esta sección es original. Se construye una extensión de los snarks de la familia de Blanuša tipo 1, introduciendo el concepto de pegado de gráficas por medio de trayectorias de longitud s , con $s \in \mathbb{Z}^+$. Desde esta nueva óptica, los snarks de Blanuša tipo 1 y los snarks de Goldberg se pueden ver como pegados de pares de ciclos C_5 's. Para obtener la extensión de los snarks de Blanuša tipo 1 se pegan pares de ciclos C_k , con $k > 5$. Los snarks resultantes al realizar la extensión, tienen índices cromáticos menores que 4, éstos índices dependen del número de pares que participan en la construcción de los snarks. La asignación de la coloración a los nuevos snarks es una consecuencia de las coloraciones conocidas de los snarks de Blanuša tipo 1, sin embargo, los autores consideran que la extensión de los snarks de Blanuša tipo 1 es un ejercicio interesante, así que se presenta la ampliación de la familia paso a paso. Se da una cota para χ'_c de las nuevas familias de gráficas. Dentro de este esquema, se plantean los snarks de Goldberg como pegados de gráficas C_5 mediante trayectorias de tamaño 2.

Considérese el bloque fundamental de las gráficas de la familia de Blanuša tipo 1, figura 13. En dicho bloque pueden verse dos C_5 's formados por los vértices $\{p, r_0, w_0, t_0, q\}$ y $\{p, o_0, z_0, s_0, q\}$, que comparten la arista pq más aristas que permiten unir dicho bloque con otros bloques fundamentales y conservar la cubicidad de la gráfica elegida en la familia. Se puede considerar ese par de C_5 's como una subestructura del bloque fundamental, la cual será llamada *bloque básico de construcción* (*bbc*), el *bbc* formado por dos ciclos que comparten algunas aristas que forman una trayectoria t . En este caso, la trayectoria es la arista común a los ciclos C_5 . Es posible obtener un nuevo *bbc* para una familia de snarks si los vértices w_0 y z_0 se sustituyen por triángulos. En el paso descrito se aumentan 6 aristas, tres por cada triángulo. Si el proceso se repite en la nueva gráfica sustituyendo los vértices w_1 y z_1 por dos

triángulos y esto se hace k veces, el número de aristas aumenta en $6k$ aristas respecto al bloque inicial.

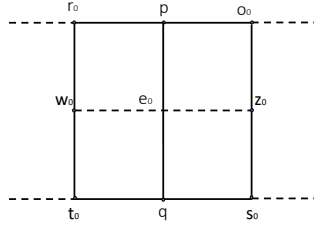


Figura 13: Bloque básico de construcción de los snarks Blanuša tipo 1.

El proceso descrito anteriormente puede realizarse independientemente sobre cada uno de los ciclos C_5 , originando dos ciclos C_{2n_1+1} y C_{2n_2+1} , donde n_1 y n_2 pueden ser diferentes, según el número de pasos efectuados en cada ciclo. Así el *bbc* asociado al par C_5, C_5 se convierte en el bloque básico de construcción asociado a un par de ciclos C_{2n_1+1}, C_{2n_2+1} , con n_1, n_2 y $s \in \mathbb{Z}^+$. Para simplificar el proceso, considérese solamente un ciclo C_{2n+3} del *bbc*, se puede aplicar los pasos descritos para obtener un ciclo C_{2n+5} , con $n \in \mathbb{Z}^+$, ver figura 14 a), b). A este proceso se le denomina *Transformación T+*. En el siguiente párrafo se da una definición formal de la Transformación *T+*.

Definición 4.1. Se considera un ciclo C_{2k+3} con dos trayectorias de longitud k , la primera trayectoria es $r_0, r_1, r_2, \dots, r_{k-1}, w_0$ y la segunda trayectoria es $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}, w_0$, se tienen además, aristas auxiliares de r_j a t_j , con $j = 1, 2, \dots, k - 1$; como se muestra en la figura 14. Para obtener C_{2k+5} , se agregan los vértices r_k y t_k formando las aristas nuevas $r_{k-1}r_k, r_k, w_k, t_{k-1}t_k, t_k, w_k$, donde w_k es un vértice nuevo que se agrega en la arista e , quedando colocado en la región interna del ciclo C_{2k+3} . Se transforma el vértice w_0 en un triángulo con vértices r_k, t_k y w_k . Las aristas $r_k w_k$ y $w_k t_k$ son parte del nuevo ciclo C_{2k+5} , la arista $r_k t_k$ se usa como arista auxiliar. A esta transformación sobre C_{2k+3} para obtener C_{2k+5} , se le llama una *Transformación T+*.

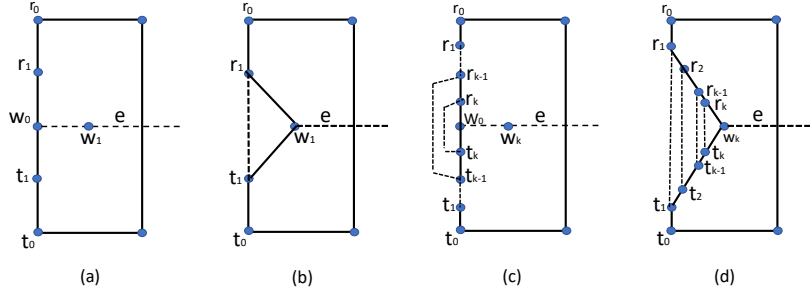


Figura 14: Proceso para obtener la familia de snarks Blanusa tipo 1 extendidos.

En la Figura 14 *c), d)* se muestra C_{2k+5} como resultado de haber realizado k transformaciones $T+$ partiendo de C_5 . Se observa C_{2k+5} con sus aristas auxiliares que constituyen un elemento de una nueva familia proveniente de los snarks Blanusa tipo 1.

4.1 Pegado de ciclos por trayectorias de longitud s . Snarks Blanusa tipo 1 extendidos

En esta sección se formalizarán algunos conceptos que se han utilizado en los párrafos anteriores. Con esa intención se define el pegado de ciclos por trayectorias de longitud s .

Definición 4.1.1. Sean n_1, n_2 y $s \in \mathbb{Z}^+$; $s < 2n_1 + 1, 2n_2 + 1$. Se consideran C_{2n_1+1} y C_{2n_2+1} dos ciclos impares y t una trayectoria de longitud s . Se dice que la gráfica $C_{2n_1+1} \circ_s C_{2n_2+1}$ es el pegado de C_{2n_1+1} y C_{2n_2+1} mediante una trayectoria de longitud s , si dicha gráfica es la unión de C_{2n_1+1} , C_{2n_2+1} y $C_{2n_1+1} \cap C_{2n_2+1} = t$.

Se consideran gráficas conexas con una arista distinguida uv , formadas por el pegado de bloques de *forma cíclica*, entendiendo este concepto como el pegado del último bloque conectado con el primero por los extremos de la arista uv . Sea $C_{2n_1+1} \circ_s C_{2n_2+1}$, el bloque básico de

construcción de las gráficas junto con algunas otras aristas *auxiliares* que permiten la formación de gráficas cúbicas. La idea subyacente en estas construcciones es encontrar bloques básicos que al unirse mediante aristas auxiliares produzcan snarks.

Se nombran *snarks de Blanuša tipo 1 extendidos* a las familias de snarks que se construyen tomando como *bbc* a $C_{2n_1+1} \circ_1 C_{2n_2+1}$ con $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$. Si $n_1 = n_2 = n$, a la familia de snarks con m bloques $C_{2n+1} \circ_1 C_{2n+1}$ pegados en forma cíclica, unión la arista uv , con $m \in \mathbb{Z}^+$, m impar y $n \geq 3$, se le denota por $B_m^{C_{2n+1}}$. Así, la familia de snarks $B_m^{C_5}$ es aquella cuyo *bbc* es $C_5 \circ_1 C_5$, es decir el conjunto de snarks de Blanuša tipo 1.

Dado que para obtener un snark cuyo *bbc* es $C_{2n_1+1} \circ_1 C_{2n_2+1}$, se parte del *bbc* $C_5 \circ_1 C_5$. Las ideas expresadas anteriormente, se enuncian en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.2. *Sean $n_1, n_2 \geq 2$, $k_1, k_2 \geq 1$. Un snark S cuyo bloque básico de construcción es $C_{2n_1+1} \circ_1 C_{2n_2+1}$, se puede transformar en un snark S' con bloque básico de construcción $C_{2(n_1+k_1)+1} \circ_1 C_{2(n_2+k_2)+1}$, usando transformaciones $T+$.*

Demostración. Para obtener el snark S' a partir del snark S basta con realizar k_1 transformaciones $T+$ sobre el ciclo $C_{2(n_1+k_1)+1}$ y k_2 transformaciones $T+$ sobre el ciclo $C_{2(n_2+k_2)+1}$. \square

Dada una (l, d) -coloración cromática circular de un snark S con bloques básicos de construcción $C_{2n_1+1} \circ_1 C_{2n_2+1}$ y $n_1, n_2 \geq 2$. Si otro snark S' se obtiene de S usando un número finito de transformaciones $T+$, la coloración (l, d) se conserva. Este hecho se expresa en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.3. *Sean $n_1, n_2 \geq 2$, y S un snark que pertenece a la familia de snarks de Blanuša tipo 1 extendidos, tal que su bloque básico de construcción es $C_{2n_1+1} \circ_1 C_{2n_2+1}$ y que admite una (l, d) -coloración circular de sus aristas. Si un snark S' se construye a partir de S mediante un número finito de Transformaciones $T+$, sobre algunos de sus bloques, entonces S' también admite una (l, d) -coloración cromática circular de sus aristas.*

Demostración. Esto ocurre porque en cada aplicación de la Transformación $T+$ a un vértice v de S , este se sustituye por un triángulo T_v con lo cual no se altera la (l, d) -coloración cromática circular del nuevo snark S' . El snark S' hereda la coloración de las aristas incidentes a v , como se muestra en la figura 4. \square

Nota 4.1.4. Si se realizan sobre cada bloque de S , $2(k_1 + k_2)$ Transformaciones $T+$, se obtiene un snark S' que tiene a $C_{2n_1+k_1} \circ_1 C_{2n_2+k_2}$ como bloque básico de construcción, con $n_1, n_2 \geq 2$ y $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^+$. Además S' contiene dos triángulos.

En la figura 15, puede observarse una $(9m + 2, 3m)$ -coloración de las aristas del primer bloque de $B_m^{C_5}$. En la figura 16 se muestra una gráfica cuyo bloque básico de construcción es $C_5 \circ_1 C_{2n+1}$, dicho bloque se obtuvo a partir del bloque $C_5 \circ_1 C_5$ efectuando Transformaciones $T+$ en uno de los C_5 's originales. Se observa que el bloque $C_5 \circ_1 C_{2n+1}$ conserva la coloración cromática circular de las aristas del bloque inicial $C_5 \circ_1 C_5$.

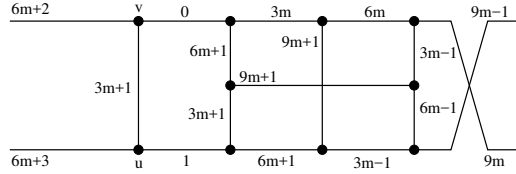


Figura 15: Una $(9m + 2, 3m)$ -coloración de las aristas del primer bloque de $B_m^{C_5}$.

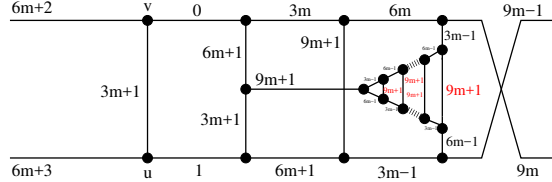


Figura 16: Primer bloque de un snark cuyo bbc es $C_5 \circ_1 C_{2n+1}$, con una $(9m + 2, 3m)$ -coloración de sus aristas.

Por el teorema 3.3, se sabe que la familia B_m^1 tiene como índice cromático circular a $3 + \frac{2}{3m}$, lo cual implica que cada elemento de la familia B_m^1 tiene una $(9m + 2, 3m)$ -coloración cromática circular. El índice $\chi'(S)$ depende del número de bloques del snark S considerado. Partiendo de la familia B_m^1 con bbc $C_5 \circ_1 C_5$ y mediante la aplicación reiterada de la Transformación $T+$, se tiene por la Proposición 4.1.2, que las familias de snarks de Blanuša tipo 1 extendidos que tienen como bloques básicos de construcción a $C_{2n_1+1} \circ_1 C_{2n_2+1}$, heredan la coloración

cromática circular de los elementos de B_m^1 , este hecho nos permite asegurar que el número $3 + \frac{2}{3m}$ es una cota para el índice de la familia de los snarks de Blanuša tipo 1 extendidos.

Teorema 4.1.5. *Si S es un elemento de la familia de los snarks de Blanuša tipo 1 extendidos, que tienen como bloque básico de construcción a $C_{2n_1+1} \circ_1 C_{2n_2+1}$, se cumple que $|\chi'_c(S)| \leq 3 + \frac{2}{3m}$.*

Demostración. El Teorema 4.1.5 se cumple aplicando el Teorema 3.3. \square

En particular, considérese la familia $B_m^{C_{2n+1}}$, con m impar y $m > 3$. Si se obtiene una $(9m + 2, 3m)$ -coloración cromática circular para $B_m^{C_{2n+1}}$, se puede producir una $(9m + 2, 3m)$ -coloración circular para $B_{m+2}^{C_{2n+1}}$ mediante la repetición de la coloración de los dos últimos bloques, mediante unos leves ajustes. Para una gráfica de la familia $B_m^{C_{2n+1}}$, denótese cada bloque básico de construcción, según el lugar que ocupa en la gráfica, de izquierda a derecha. En el ejemplo siguiente se ejemplifican los cálculos para extender una $(29, 9)$ -coloración cromática circular de $B_3^{C_7}$ a una $B_5^{C_7}$.

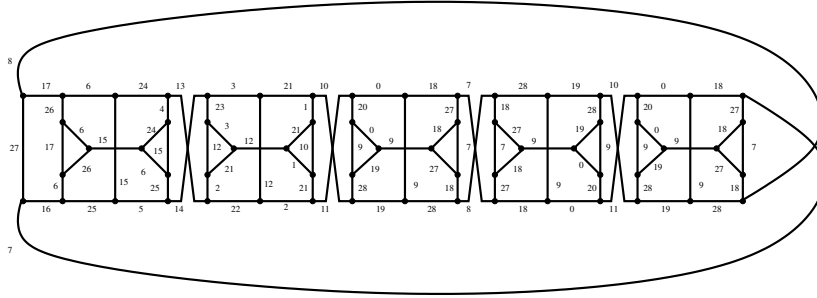


Figura 17: Una $(29, 9)$ -coloración de las aristas de $B_5^{C_7}$.

Ejemplo 4.1.6. En la la figura 17 se representa $B_5^{C_7}$ con una $(29, 9)$ -coloración cromática circular de sus aristas. Sean B_5^i , $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ los bloques de $B_5^{C_7}$, vistos de izquierda a derecha. Si se consideran solamente los tres primeros bloques de $B_5^{C_7}$, la coloración asignada corresponde a $B_3^{C_7}$. Para extender la coloración de $B_3^{C_7}$ a $B_5^{C_7}$, el bloque B_3^3 se gira 180 grados en la dirección horizontal y 180 grados en la dirección vertical, así se obtiene el bloque B_5^4 . El bloque B_5^4 se une por la izquierda con B_5^3 y por la derecha con una copia de B_5^3 que en $B_5^{C_7}$ corresponde al bloque B_5^5 . Por último, se tiene que las aristas que parten del

bloque B_5^5 a los vértices c y d del primer bloque completan la coloración de $B_5^{C_7}$.

Sea $m \in \mathbb{Z}^+$. Se observa que a medida que m crece $\chi'(B_m^1)$ decrece, luego se puede considerar una cota general ms holgada, eligiendo $m = 3$. Así, la siguiente proposición es un corolario del teorema 4.1.5.

Corolario 4.1.7. *Si $n_1, n_2 \geq 3$ y S es un elemento de la familia de snarks de Blanuša tipo 1 extendidos cuyo bloque básico de construcción es $C_{2n_1+1} \circ_1 C_{2n_2+1}$. Entonces $|\chi'_c(S)| \leq \frac{29}{9}$.*

Demostración. Por el Teorema 4.1.5, la demostración es inmediata. \square

Nota 4.1.8. Para m impar, el snark $B_m^{C_{2n+1}}$ tiene como menor al snark $B_m^{C_5}$. Ambos snarks tienen como menor al snark dado por la gráfica de Petersen.

4.2 Acerca de los snarks de Goldberg

Los snarks de Goldberg pueden verse como aquellos snarks que tienen como bloque básico de construcción a dos ciclos C_5 pegados por una trayectoria de longitud 2. La gráfica $C_5 \circ_2 C_5$ que aparece en la figura 18 es el *bbc* de los snarks de Goldberg. Se realiza el pegado circular de $2n + 1$ copias del bloque básico de construcción para obtener G_{2n+1} , con $n \geq 1$, n entero positivo. Las gráficas G_3 y TG_3 contienen un ciclo C_3 que conecta los bloques básicos de construcción, ver figura 9. Si en G_3 y TG_3 se contraen los triángulos a un vértice, se obtienen los *snarks de Loupekine* [23]. Los snarks de Goldberg tienen una $(10, 3)$ -coloración circular de sus aristas, que comparten con los snarks de Loupekine.

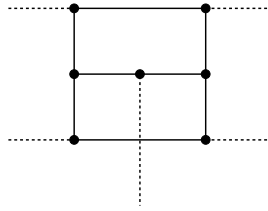


Figura 18: Bloque básico $C_5 \circ_2 C_5$.

Sean $k, n, r \in \mathbb{Z}^+$; k impar y $r = 2n + 1$. Considérese JG_k^r como la familia de gráficas conexas cúbicas que usan k bloques básicos de construcción: $C_{2n+1} \circ_2 C_{2n+1}$, que se pegan en forma cíclica para formar

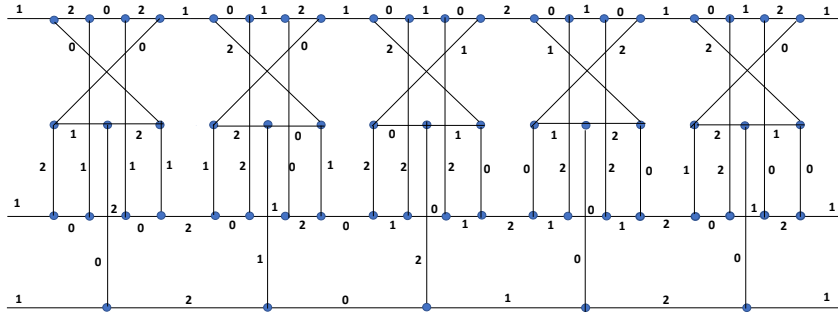


Figura 19: JG_5^7 con una 3-coloración de sus aristas.

una gráfica tipo Goldberg. En el caso de $r = 5$, JG_k^5 representa a la familia de los snarks de Goldberg. En el teorema 3.2 se afirma que $\chi'_c(JG_k^5)$ es igual a $3 + \frac{1}{4}$, si $k \geq 5$; es decir JG_k^5 tiene una $(13, 4)$ coloración de sus aristas.

Es natural preguntarse si es posible extender la familia de los snarks de Goldberg, de manera similar a la extensión que se realizó con los snarks de Blanuša tipo 1. Considérese la gráfica JG_5^7 como un primer intento de responder la cuestión planteada. Se observa que JG_5^7 admite una 3-coloración de sus aristas, por lo tanto aunque es una gráfica cúbica conexa, no es un snark. Se conjetura que los snarks de Goldberg no admiten una extensión mediante pegados de bloques básicos $C_{2n+1} \circ_2 C_{2n+1}$, a la manera de Goldberg. En la figura 19, se exhibe una 3-coloración de JG_5^7 .

5 Anexo: Cálculo de una (l, d) -coloración circular de un snark, mediante la resolución de un problema de programación lineal entera

Para poder extender una (l, d) -coloración cromática circular dada de un elemento de $B_m^{C_5}$, a un snark de la familia de snarks de Blanuša tipo 1 extendidos, se parte de una (l, d) -coloración de las aristas del

snark original en $B_m^{C_5}$. Calcular una (l, d) -coloración cromática circular de un snark es un problema *NP*-duro. Aquí, se plantea el cálculo de una (l, d) -coloración cromática circular considerando un conjunto de desigualdades lineales con variables enteras, es decir, proponiendo un problema de decisión expresado como un problema de programación lineal entera.

Sea $G = (V, E)$ una gráfica conexa cúbica con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ su conjunto de vértices y $a_{i,j}$ la arista que une los vértices v_i y v_j , si estos son adyacentes en G . Dado un conjunto de colores $\{0, 1, 2, \dots, l-1\}$, se desea asignar un color a cada arista $a_{i,j}$ de G . Se asocia a cada arista $a_{i,j}$ la variable $x_{i,j}$, que corresponde al color que debe asignarse a $a_{i,j}$ en la (l, d) -coloración circular. Una (l, d) -coloración cromática circular para G tal que $l > d$, se puede obtener resolviendo el siguiente problema de programación lineal entera (PPLE). Para profundizar en el tema de PPLE, pueden consultarse [17, 18].

Se plantean las desigualdades que constituyen el poliedro del PPLE asociado a la (l, d) -coloración circular.

1. Sea $x_{i,j}$ el color que es asignado a la arista $a_{i,j}$ de G , para cada arista se asocia una desigualdad:

$$0 \leq x_{i,j} \leq l-1,$$

se producen $\frac{3n}{2}$ desigualdades.

2. Para todo $v \in V$, existen tres vértices adyacentes a v , sean éstos $\{u_1^v, u_2^v, u_3^v\}$. Luego, asociadas a cada vértice v hay tres desigualdades:

$$d \leq |x_{u_i^v, v} - x_{u_j^v, v}| \leq l-d,$$

para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Se producen $3n$ desigualdades.

Si el poliedro formado por las $\frac{3n}{2} + 3n$ desigualdades anteriores tiene soluciones enteras factibles, entonces existe una (l, d) -coloración cromática circular para la gráfica G .

El programa Gurobi se utilizó para encontrar algunas (l, d) -coloraciones cromáticas circulares de los elementos de la familia de snarks B_m^1 extendidos, con m bloques. Por un lado, se consideró $m = 3$, calculando para algunos snarks sus $(29, 9)$ -coloraciones, se eligió $m = 3$ con la finalidad de minimizar los tiempos de cómputo. Por otro lado para $m > 3$, se efectuaron cálculos para (l, d) -coloraciones tales que $\frac{l}{d} \leq \frac{29}{9}$, sin conseguir algún snark con índice menor a $3 + \frac{2}{9}$.

Agradecimientos

Los autores de este artículo agradecemos al Dr. Isidoro Gitler por sus valiosos y enriquecedores comentarios sobre nuestro trabajo, así como a nuestro colega Diego Frausto Tamayo, por su ayuda con los cálculos computacionales para obtener algunas coloraciones cromáticas circulares particulares, las que nos permitieron experimentar con diversas asignaciones de colores a las aristas de las familias de gráficas que estudiamos en este tratado.

Ma. Guadalupe Rodríguez Sánchez
Departamento de Ciencias Básicas,
 Universidad Autónoma Metropolita-
 na,
 Av. San Pablo No. 180, Col.
 Reynosa Tamaulipas
 Azcapotzalco, 02200 Mxico
 rsmg@azc.uam.mx

José de Jesús Rodríguez Martínez
Posgrado de Optimización,
 Universidad Autónoma Metropolita-
 na,
 Av. San Pablo No. 180, Col.
 Reynosa Tamaulipas
 Azcapotzalco, 02200 Mxico
 al2133804601@azc.uam.mx

Referencias

- [1] Afshani P., Ghandehari M., Hatami H., Tusserkani R, Zhu X., *Circular chromatic index of graphs of maximum degree 3*, Journal of Graph Theory, **49** (2005), 325–335.
- [2] Bondy J. A., Hell P., *A note on the star chromatic number*, Journal of Graph Theory, **14** (1990), 479–482.
- [3] Chladný M., Skoviera M., *Factorisation of Snarks*, The Electronic Journal of Combinatorics, **17** (2010), Núm. R32.
- [4] Garner M., *Mathematical games column*, Scientific American, **234** (1976), 126–130.
- [5] Guichard R., *Acyclic graph coloring and the complexity of the star chromatic number*, Journal of Graph Theory, **17** (1993), 129–134.
- [6] Ghebleh M., Král D., Norine S. y Thomas R., *The circular chromatic index of flower snarks*, The Electronic Journal of Combinatorics, **13** (2006), pp. Note 20, 7 pp.
- [7] Ghebleh M., *The circular chromatic index of Goldberg snarks*, Discrete Mathematics, **307** (2007), 32203225.

- [8] Ghebleh M., *Circular chromatic index of generalized Blanuša snarks*, The Electronic Journal of Combinatorics, **15** (2007), 32203225.
- [9] Goldberg M. K., *Construction of Class 2 graphs with maximum vertex degree 3*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, **31** (1981), 282–291.
- [10] Hackman A., K., Kemnitz A., *The circular chromatic index*, Discrete Mathematics, **286** (2004), 89–93.
- [11] Isaacs R., *Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable*, American Mathematical Monthly, **82** (1975), 221–239.
- [12] Máčajová, E., Skoviera M., *Irreducible snarks of given order and cyclic connectivity*, Discrete Mathematics, **306** (2006), 779–791.
- [13] Mazk J., *Circular chromatic index of snarks*, Tesis doctoral, (2007).
- [14] Mazk J., *Circular chromatic index of type 1 Blanuša snarks*, Journal of Graph Theory 59, **Vol. 15**, No. 5 (2008), 89–96.
- [15] Nadolski A., *Contemporary Mathematics*, American Mathematical Society, **352** (2004), 123–137.
- [16] Nadolski A., *The circular chromatic index of some Class 2 graphs*, Discrete mathematics, **307** (2007), 1447–1454.
- [17] Nemhauser G. L. and Wolsey L. A., *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, New York,(1999).
- [18] Schrijver A., *Theory of Linear and Integer Programming*, Wiley, Chichester, (1986).
- [19] Rodríguez M. G., Herrera S., *La coloración circular de gráficas. Una aplicación al problema de cruces vehiculares*, Miscelánea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana, **58** (2014), 11–30.
- [20] Tutte W. T., *A geometrical version of the four color problem*, Combinatorial Mathematics and its Applications, Univ. N. Carolina Press, **23** (1969), 553-560.

- [21] Vince A., *Star chromatic number*, Journal of Graph Theory, **12** (1998), 551–559.
- [22] Vizing V. G., *On an estimate of the chromatic class of a p -graph*, Journal Discret Analiz, **3** (1964), 25–30.
- [23] Watkins J. J., *Snarks, in Graph theory and its applications*, Annals of the New York Academy of Sciences, **576** (1989), 606–622.
- [24] Zhu X., *Circular chromatic number: a survey*, Discrete Mathematics, **229** (2001), 371–410.