Morfismos, Vol. 4, No. 2, 2000, pp. 61–76

Hipergrupos y álgebras de Bose-Mesner*

Isaías López [1]

Resumen

En este artículo se prueba que toda álgebra de Bose-Mesner es un hipergrupo con el producto usual y con el producto Hadamard de matrices. Además, presentamos los diferentes tipos de isomorfismos entre álgebras de Bose-Mesner y sus relaciones con los hipergrupos.

1991 Mathematics Subject Clasification: 05E45
Keywords and phrases: álgebras de Bose-Mesner, hipergrupos

1 Introducción

Existen varios objetos matemáticos cuya esencia es el de un esquema de asociación y que se conocen con varios nombres, pero esencialmente son el mismo concepto matemático; por ejemplo, álgebras de adyacencia, álgebras de Bose-Mesner, anillo centralizador, anillo de Hecke, anillo de Schur, álgebra de caracteres, hipergrupos, grupos probabilísticos.

Los hipergrupos son una generalización de los grupos, en donde el producto de dos elementos está determinado por una función de distribución. Existe mucha investigación en esta área, sobre todo para generalizar conceptos básicos de la teoría de grupos, por ejemplo, en hipergrupos existe el teorema de Lagrange.

En el presente trabajo demostramos que toda álgebra de Bose-Mesner, bajo cierta normalización, es un hipergrupo, tanto con el producto usual de matrices como con el producto de Hadamard (ver los Teoremas 3.3 y 3.4). Esto permite dar una visión distinta de conceptos tales como isomorfismos y dualidades en álgebras de Bose-Mesner.

*Este trabajo se realizó con el apoyo de CONACyT, a través del proyecto No. 29275E.

[1]Estudiante de doctorado del Departamento de Matemáticas, CINVESTAV-IPN. Becario de CONACyT.

2 Hipergrupos

La teoría general de hipergrupos fue introducida por Dunkl [4], Jewett [9] y Spector [11] de manera independiente, y tratan a los hipergrupos como un caso especial.

Una interpretación física es la siguiente: Un hipergrupo conmutativo finito es una colección de partículas, digamos $\{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$, en las cuales está permitido la interacción por colisión entre ellas. Cuando dos partículas colisionan forman una tercera partícula. Si colisionamos c_i con c_j la probabilidad de que resulte la partícula c_k es n_{ij}^k y este número es fijo. La partícula c_0 tiene la propiedad de ser absorbida en cualquier colisión; la llamamos un fotón. Cada partícula tiene una anti-partícula la cual está especificada por la siguiente regla: La colisión de dos partículas tiene una probabilidad positiva de resultar en un fotón si y sólo si las dos partículas son anti-partículas una de la otra. La interacción de las partículas son independientes del orden, del tiempo y de su posición en el espacio. La estructura del sistema está completamente determinado por las probabilidades n_{ij}^k las cuales son invariantes bajo intercambio de todas las partículas con sus anti-partículas.

Definición 1.1 *Un hipergrupo generalizado es una pareja* $(\mathcal{H} \subset \mathcal{A})$ *donde* $\mathcal{H} = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ *y* $\mathcal{A}$ *es una álgebra asociativa con identidad* c_0 *y con involución* $\star$ *sobre* $\mathbb{C}$*, que satisface las siguientes condiciones:*

(A1) $\mathcal{H}$ *es una base de* $\mathcal{A}$.

(A2) $\mathcal{H}^\star = \mathcal{H}$*, que denotaremos por* $c_i^\star = c_{\sigma(i)}$.

(A3) *La estructura constante* $n_{ij}^k \in \mathbb{C}$ *definida por:*

$$c_i c_j = \sum_{k=0}^{n} n_{ij}^k c_k$$

satisface lo siguiente

$$c_i^\star = c_j \Longleftrightarrow n_{ij}^0 > 0,$$

$$c_i^\star \neq c_j \Longleftrightarrow n_{ij}^0 = 0.$$

En el resto de este trabajo $\mathcal{H}$ denotará a un hipergrupo generalizado.

Si $\mathcal{A}$ es conmutativo, entonces $\mathcal{H}$ es conmutativo. Además, se dice que $\mathcal{H}$ es *Hermitiano* si $c_i^\star = c_i \ \forall i$; *real* si $n_{ij}^k \in \mathbb{R} \ \forall i, j, k$; *positivo* si $n_{ij}^k \geqslant 0 \ \forall i, j, k$. Por otra parte, decimos que $\mathcal{H}$ es *normalizado* si satisface que

$$(A4) \qquad \sum_k n_{ij}^k = 1 \ \forall i, j.$$

Un hipergrupo generalizado que es real y normalizado se dice que es hipergrupo *signado*. Un hipergrupo generalizado que es positivo y normalizado se llama simplemente un *hipergrupo*.

Definimos el *peso* de c_i como

$$(1.1) \qquad w(c_i) = (n_{i\sigma(i)}^0)^{-1} > 0$$

y el *peso* de $\mathcal{H}$ como

$$(1.2) \qquad w(\mathcal{H}) = \sum_{i=0}^n w(c_i).$$

Consideremos la siguiente forma alternativa de $(A4)$:

$$(A4') \qquad w(c_i)^{-1} w(c_j)^{-1} = \sum_k n_{ij}^k w(c_k)^{-1}.$$

Un hipergrupo que es real y satisface $(A4')$ se dice que es un *ensamble*. Aunque la condición $(A4)$ parezca más fácil de probar que $(A4')$, esto no siempre es así, es por eso la siguiente proposición.

Proposición 1.2 *Existe una correspondencia uno a uno entre ensambles e hipergrupos signados.*

Demostración: Si $\mathcal{H} = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ es un hipergrupo signado, tenemos que $\bar{\mathcal{H}} = \{w(c_0)c_0, w(c_1)c_1, \ldots, w(c_n)c_n\}$ es un ensamble.

Reciprocamente, para $\bar{\mathcal{H}} = \{c_0, c_1, \ldots, c_n\}$ un ensamble tenemos que $\mathcal{H} = \{w(c_0)c_0, w(c_1)c_1, \ldots, w(c_n)c_n\}$ es un hipergrupo signado. ∎

De aquí en adelante, a menos que se diga lo contrario, sólo consideraremos hipergrupos que son conmutativos.

Proposición 1.3 *La *-álgebra es semisimple.*

Demostración: Se sigue del hecho de que la *-álgebra no tiene elementos idempotentes. ∎

Para $a \in \mathcal{A}$, $ad(a) \in End(\mathcal{A})$ denotará el operador multiplicación por a.

Lema 1.4 *El conjunto* $\{ad(c_i)\}$ *es linealmente independiente en* $End(\mathcal{A})$.

Demostración: Si $\sum_i r_i ad(c_i) = 0$, entonces multiplicando por $c_j^\star$ y considerando el coeficiente de c_0 tenemos que $r_j = 0$. ■

El álgebra $ad(\mathcal{A}) \subset End(\mathcal{A})$ tiene dimensión $n+1$ y es conmutativa y semisimple. Esto nos dice que $End(\mathcal{A})$ es isomorfa al álgebra de operadores diagonalizables en $M(n+1,\mathbb{C})$. Por lo tanto, podemos encontrar una base $\{e_o, e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathcal{A}$ en la cual los operadores $ad(c_i)$ son diagonales, esto es,

$$c_i e_j = \chi_j(c_i) e_j \;\; \forall i, j \tag{1.3}$$

para alguna función χ_j tal que

$$e_j e_k = \delta_{jk} e_j, \tag{1.4}$$

donde δ_{ij} es la delta de Kroenecker.

Si $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ denota el espacio de todas las funciones de $\mathcal{H}$ en los complejos, entonces el conjunto de funciones $\{\chi_i\}$ es linealmente independiente en $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Definición 1.5 *Un carácter de* $\mathcal{H}$ *es cualquier* $\chi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ *que satisface*

$$\chi(c_i)\chi(c_j) = \sum_k n_{ij}^k \chi(c_k) \;\; \forall i, j. \tag{1.5}$$

Si la extensión lineal de χ en $\mathcal{A}$ se denota también por χ, tendremos la siguiente formulación equivalente.

$$\chi(c_i)\chi(c_j) = \chi(c_i c_j) \;\; \forall i, j. \tag{1.6}$$

Al conjunto de todos los caracteres de $\mathcal{H}$ lo denotaremos por $\hat{\mathcal{H}}$.

Proposición 1.6 $\hat{\mathcal{H}} = \{\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n\}$ *y*

$$\chi_i(c_j^\star) = \overline{\chi_i(c_j)} \;\; \forall i, j. \tag{1.7}$$

Demostración: Tenemos que $c_i e_j = \chi_j(c_i) e_j$ para toda i, j, de donde $\chi_j(c_i)\chi_j(c_s)e_j = c_i c_s e_j = \sum_k n_{is}^k c_k e_j = \sum_k n_{ij}^k \chi_j(c_k) e_j$, es decir, $\chi_j(c_i)\chi_j(c_s) = \sum_k n_{ij}^k \chi_j(c_k)$. De aquí se sigue la proposición porque $\mathcal{A}$ es isomorfa a la *-álgebra $\mathbb{C}^{n+1}$ y esta tiene exactamente $n+1$ caracteres que satisfacen las condiciones establecidas. ■

Claramente la función idénticamente 1 es un carácter de $\mathcal{H}$, el cual denotaremos por χ_0.

Ahora deseamos ver que $\hat{\mathcal{H}}$ es una base ortogonal de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Para esto, para todo $f, g \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, definimos $f^\star(c_i) = f(c_i^\star)$ e introducimos el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{w(\mathcal{H})} \sum_i w(c_i) f(c_i) \overline{g(c_i)}. \tag{1.8}$$

Como $\mathcal{H}$ y $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ son bases para $\mathcal{A}$ podemos encontrar constantes $\alpha_j^k \in \mathbb{C}$ tales que

$$e_j = \sum_k \alpha_j^k c_k \ \forall j. \tag{1.9}$$

Multiplicando ambos lados por $c_i^\star$ y comparando los coeficientes de c_0 podemos observar que

$$\alpha_j^i = w(c_i)\chi_j(c_i^\star)\alpha_j^0, \tag{1.10}$$

de donde

$$e_j = \alpha_j^0 \sum_k w(c_k)\chi_j(c_k^\star) c_k. \tag{1.11}$$

Combinando esto con la ecuación (1.4) y comparando los coeficientes de c_0 obtenemos:

$$\delta_{ij} = \alpha_j^0 \sum_k w(c_k)\chi_i(c_k)\chi_j(c_k^\star) = \alpha_j^0 w(\mathcal{H})\langle \chi_i, \chi_j \rangle. \tag{1.12}$$

De aquí tenemos el siguiente lema:

Lema 1.7 *$\hat{\mathcal{H}} = \{\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n\}$ es una base ortogonal de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ con respecto al producto interno definido en (1.8).*

Como $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ es una *-álgebra con unidad χ_0 bajo la multiplicación punto a punto y conjugación compleja, podemos escribir

$$\chi_i\chi_j = \sum_k m_{ij}^k \chi_k \text{ con } m_{ij}^k \in \mathbb{C}. \tag{1.13}$$

Además, si $\chi_i^\star = \chi_j$ podemos definir el peso de χ_i como $w(\chi_i) = (m_{ij}^0)^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \chi_i, \chi_i \rangle &= \langle \chi_i \overline{\chi_i}, \chi_0 \rangle \\ &= \langle \chi_i \chi_i^\star, \chi_0 \rangle \\ &= w(\chi_i)^{-1} \langle \chi_0, \chi_0 \rangle \\ &= w(\chi_i)^{-1}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

De aquí concluimos que $w(\chi_i) \in \mathbb{R}$ y $w(\chi_i) > 0$. Además, usando la ecuación (1.11) tenemos:

Proposición 1.8

$$e_i = \frac{w(\chi_i)}{w(\mathcal{H})} \sum_k w(c_k)\chi_i^\star(c_k)c_k \;\; \forall i. \tag{1.15}$$

En particular,

$$e_0 = \frac{1}{w(\mathcal{H})} \sum_k w(c_k)c_k. \tag{1.16}$$

En conclusión, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.9 *Si $\mathcal{H}$ es un hipergrupo signado, también lo es $\hat{\mathcal{H}}$. Además $w(\mathcal{H}) = w(\hat{\mathcal{H}})$.*

2 Álgebras de Bose-Mesner

El concepto de esquema de asociación es importante en álgebra combinatoria. Dicho concepto aparece en el estudio de códigos, diseños, gráficas de distancia regular, invariantes de nudos y en muchos otros temas. El estudio de los esquemas de asociación lo inició Delsarte en 1973 (ver [3]). En el caso simétrico los esquemas de asociación son esencialmente particiones de una gráfica completa en subgráficas regulares que están relacionadas entre sí de alguna manera específica. Para un análisis extensivo de este tema se pueden consultar [1] y [2].

Definición 2.1 *Un esquema de asociación de clase d es una familia de $\{0,1\}$-matrices $\{A_i | i = 0, \ldots, d\}$ de orden n que satisfacen lo siguiente:*

(B1) $A_0 = I$ (*I es la matriz identidad*).

(B2) $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$ (*J es la matriz con todas sus entradas igual a uno*).

(B3) *Para todo i, ${}^tA_i = A_{\sigma(i)}$, para algún $\sigma(i) \in \{0, 1, \ldots, d\}$ (${}^tA$ denota la traspuesta de A).*

(B4) $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$ (*$\circ$ denota el producto de Hadamard de matrices, entrada por entrada*).

(B5) $A_i A_j = A_j A_i = \sum\limits_{k=0}^{d} p_{ij}^k A_k$ (*equivalentemente, $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ para todo i, j, k*).

El álgebra generada por $\{A_i | i = 0, 1, \ldots, d\}$ sobre $\mathbb{C}$ es una álgebra conmutativa con el producto usual y con el producto de Hadamard de matrices y la familia $\{A_i | i = 0, 1, \ldots, d\}$ es una base para esta álgebra, la cual es conocida como el *álgebra de Bose-Mesner* del esquema de asociación de clase d. Esta álgebra tiene la propiedad de ser cerrada bajo trasposición compleja.

En otro contexto, a este tipo de álgebras también se les llama *álgebras Doble-Frobenius* (ver [10]).

En el caso en que ${}^tA_i = A_i$ para todo i, tenemos una álgebra de Bose-Mesner *simétrica.*

Sea

$$n_i = p_{i\sigma(i)}^o, \tag{2.1}$$

en donde n_i es el número de elementos en la diagonal de la matriz $A_i A_{\sigma(i)}$. El entero positivo n_i se llama la *valencia* de A_i, y es claro que

$n_0 = 1,$

$n_i = n_{\sigma(i)},$

$n = n_0 + n_1 + \cdots + n_d.$

La siguiente proposición es importante para relacionar las álgebras de Bose-Mesner con los hipergrupos. Su demostración se puede ver en [1].

Proposición 2.2

(*i*) $p_{0j}^k = \delta_{jk},$

(*ii*) $p_{ij}^0 = n_i \delta_{i\sigma(i)},$

(*iii*) $p_{ij}^k = p_{\sigma(i)\sigma(j)}^{\sigma(k)},$

(*iv*) $\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^k = n_i,$

(*v*) $n_k p_{ij}^k = n_j p_{\sigma(i)k}^j = n_i p_{k\sigma(j)}^i,$

(*vi*) $\sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k p_{uk}^l = \sum_{s=0}^{d} p_{ui}^s p_{sj}^l.$

Como las matrices $A_0, A_1, \ldots, A_d$ son normales y conmutan por parejas, ellas son diagonalizables simultáneamente por una matriz unitaria. Así, podemos encontrar una descomposición de $\mathbb{C}^n$ como suma directa de $d+1$ eigenespacios de dimensión $f_j,\ \ 0 \leq j \leq d$ (ver [5] y [7]). Además, como J pertenece al álgebra, n es un eigenvalor de multiplicidad 1 y entonces podemos suponer que $f_0 = 1$. Los f_i se llaman las *multiplicidades* de los esquemas. Sea $\{E_0, E_1, \ldots, E_d\}$ la base de idempotentes ortogonales con el producto usual de matrices del álgebra de Bose-Mesner, cada una de ellas corresponde a los proyectores de $\mathbb{C}^n$ en cada diferente eigenespacio, además, $f_i = tr(E_i)$, tenemos lo siguiente:

$(C1)$ $E_0 = \frac{1}{n} J,$

$(C2)$ $E_0 + E_1 + \cdots + E_d = I,$

$(C3)$ $E_i E_j = \delta_{ij} E_i,$

$(C4)$ ${}^tE_i = E_{\sigma(i)}$ para algún $\sigma(i) \in \{0, 1, \ldots, d\}$,

$(C5)$ $E_i \circ E_j = E_j \circ E_i = \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k$.

Los coeficientes q_{ij}^k son llamados los *parámetros de Krein* del esquema de asociación.

Como $\{E_0, E_1, \ldots, E_d\}$ es una base para el álgebra de Bose-Mesner, tenemos

$$A_i = \sum_{j=0}^{d} P_j(i) E_j. \tag{2.2}$$

Análogamente

$$E_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{d} Q_j(i) A_k. \tag{2.3}$$

Sea

$$P = (P_j(i)), \tag{2.4}$$

cuya entrada (i, j) de la matriz es $P_j(i)$, y sea

$$Q = (Q_j(i)), \tag{2.5}$$

cuya entrada (i, j) de la matriz es $Q_j(i)$. Las matrices P y Q se llaman la primera y segunda matriz del esquema de asociación, respectivamente. Ellas satisfacen lo siguiente:

$$PQ = QP = nI. \tag{2.6}$$

Usando las ecuaciones (2.2) y (2.3) junto con las propiedades $(A4)$ y $(C3)$ obtenemos:

$$A_i E_j = P_j(i) E_j, \tag{2.7}$$

$$E_i \circ A_j = \frac{1}{n} Q_j(i) A_j. \tag{2.8}$$

La ecuación (2.7) muestra que cada vector columna de E_j es un vector propio de A_i asociado con el valor propio $P_j(i)$. Análogamente, la ecuación (2.8) nos permite decir que cada vector columna de A_j es un vector propio de E_i asociado al valor propio $\frac{1}{n}Q_j(i)$ respecto al producto Hadamard.

Los parámetros de Krein tienen las siguientes propiedades, similares a los de la Proposición 2.2. La demostración de esta proposición se puede consultar en [1].

Proposición 2.3

(*i*) $q_{0j}^k = \delta_{jk}$,

(*ii*) $q_{ij}^0 = f_i \delta_{i\sigma(j)}$,

(*iii*) $q_{ij}^k = q_{\sigma(i)\sigma(j)}^{\sigma(k)}$,

(*iv*) $\sum_{j=0}^{d} q_{ij}^k = f_i$,

(*v*) $f_k q_{ij}^k = f_j q_{\sigma(i)k}^j = f_i q_{k\sigma(j)}^i$,

(*vi*) $\sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k q_{uk}^l = \sum_{s=0}^{d} q_{ui}^s q_{sj}^l$.

Finalmente, las entradas de la primera y segunda eigenmatrices P y Q satisfacen las siguientes relaciones:

Proposición 2.4

(*i*) $P_j(i)P_k(i) = \sum_{l=0}^{d} p_{jk}^l P_l(i)$,

(*ii*) $Q_j(i)Q_k(i) = \sum_{l=0}^{d} q_{jk}^l Q_l(i)$.

3 Hipergrupos y álgebras de Bose-Mesner

Consideremos una álgebra de Bose-Mesner $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ de dimensión $d+1$ sobre $\mathbb{C}$. Recordemos que $\mathcal{A}$ es una álgebra asociativa, conmutativa con respecto al producto usual de matrices, cuya identidad es I. Asimismo, $\mathcal{A}$ es una álgebra asociativa, conmutativa con respecto al producto de Hadamard de matrices y con identidad J.

Lema 3.1 *$\mathcal{A}$ es un hipergrupo generalizado con el producto usual de matrices y base $\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$.*

Demostración: Sea $\{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ un esquema de asociación y $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$ el álgebra de Bose-Mesner generada por dicho esquema. En particular, $\mathcal{A}$ es una álgebra asociativa, conmutativa, con identidad A_0 y con involución el mapeo traspuesta conjugada. Además, claramente se tiene (A1) y (A2), de modo que sólo resta probar (A3). Para esto, observemos que de la Proposición 2.2(ii):

$$P_{ij}^0 = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq \sigma(i), \\ n_i & \text{si } j = \sigma(i). \end{cases}$$

De aquí se sigue ($A3$). ■

Por el lema 3.1 el peso de A_i es:

$$w(A_i) = \left(p_{i\sigma(i)}^0\right)^{-1} > 0. \tag{3.1}$$

Proposición 3.2 *$\mathcal{A}$ es un ensamble con el producto usual de matrices.*

Demostración: Es suficiente probar el axioma (A4'). Usando la Proposición 2.2 tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k w\left(A_k\right)^{-1} &= \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k p_{k\sigma(k)}^0 \\
=& \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k n_k \delta_{k\sigma(k)} = \sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k \left(\sum_{r=0}^{d} p_{kr}^t\right) \\
=& \sum_{k=0}^{d}\sum_{r=0}^{d} p_{ij}^k p_{kr}^t = \sum_{r=0}^{d}\sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k p_{kr}^t \\
=& \sum_{r=0}^{d}\sum_{k=0}^{d} p_{ij}^k p_{kr}^t = \sum_{s=0}^{d}\sum_{r=0}^{d} p_{ri}^s p_{sj}^t \\
=& \sum_{s=0}^{d} p_{sj}^t \left(\sum_{r=0}^{d} p_{ri}^s\right) = \sum_{s=0}^{d} p_{sj}^t n_i \\
=& n_i n_j = p_{i\sigma(i)}^0 p_{j\sigma(j)}^0 \\
=& w(A_i)^{-1} w(A_j)^{-1}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

De la correspondencia uno a uno entre hipergrupos signados y ensambles se deduce el siguiente resultado.

Teorema 3.3 $\widetilde{\mathcal{A}} = \langle w(A_0)A_0, w(A_1)A_1, \dots, w(A_d)A_d \rangle$ *es un hipergrupo signado bajo el producto usual de matrices.*

Finalmente, de la Proposición 2.3 se deduce el siguiente resultado, similar al teorema anterior.

Teorema 3.4 $\mathcal{A}$ *genera un hipergrupo signado bajo el producto Hadamard de matrices y base* $\{E_0, E_1, \dots, E_d\}$.

4 Isomorfismos en álgebras de Bose-Mesner

Algunos de los ejemplos clásicos de álgebras de Bose-Mesner son los obtenidos a través de gráficas fuertemente regulares y de distancia regular [2]. La clasificación de gráficas fuertemente regulares y de distancia regular se realiza por medio del álgebra de Bose-Mesner asociada. Aunque la clasificación de gráficas de distancia regular es un poco más compleja, ambas ocupan el concepto de BM-isomorfismo, que se define en esta sección. Otra de las aplicaciones de la teoría de esquemas de asociación es la clasificación de modelos spin (invariantes de nudos) (ver [6]), en donde juega un papel importante el concepto de dualidad entre álgebras de Bose-Mesner.

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos álgebras de Bose-Mesner y ψ un isomorfismo de espacios vectoriales de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$.

Definición 4.1 *Se dice que* ψ *es un BM-isomorfismo de* $\mathcal{A}$ *en* $\mathcal{B}$ *si satisface:*

$$\psi(AB) = \psi(A)\psi(B) \quad y \quad \psi(A \circ B) = \psi(A) \circ \psi(B)$$

para toda $A, B \in \mathcal{A}$.

Un ejemplo de un BM-isomorfismo se obtiene a través de una matriz de permutación. Es decir, si P es una matriz de permutación, entonces $\psi(A) = P^{-1}AP$ define un BM-isomorfismo. De hecho, este isomorfismo es conocido como *isomorfismo combinatorial.*

Si $\mathcal{A}$ tiene como base usual $\{A_i \mid i = 1, \dots, d\}$ y su base de idempotentes ortogonales es $\{E_i \mid i = 1, \dots, d\}$, tenemos que $\{\psi(A_i) \mid i =$

$1, \ldots, d\}$ y $\{\psi(E_i) \mid i = 1, \ldots, d\}$ son la base usual y la base de idempotentes ortogonales de $\mathcal{B}$, respectivamente.

Usando la ecuación (2.7) obtenemos la siguiente relación

$$\psi(A_i E_j) = \psi(P_j(i)E_j) = P_j(i)\psi(E_j) = \psi(A_i)\psi(E_j),$$

de la cual se deduce que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tienen el mismo conjunto de valores propios y como ambas son diagonalizables simultáneamente por una matriz unitaria obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.2 *Si ψ es un BM-isomorfismo de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, entonces existe una matriz unitaria U tal que $\psi(A) = U^*AU$ para toda $A \in \mathcal{A}$.*

La pregunta obvia, ya que toda matriz de permutación es unitaria, es si la matriz unitaria que define el BM-isomorfismo del teorema anterior es una matriz de permutación. Parece ser que la respuesta es negativa, como lo sugiere F. Jaeger [8], aunque hasta ahora no se cuenta ni con una demostración ni con un contraejemplo.

Definición 4.3 *Decimos que ψ es una dualidad de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ si satisface que*

$$\psi(AB) = \psi(A) \circ \psi(B) \quad y \quad \psi(A \circ B) = \frac{1}{n}\psi(A)\psi(B)$$

para toda $A, B \in \mathcal{A}$.

Es claro que si ψ es una dualidad de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$, entonces $\frac{1}{n}\psi^{-1}$ es una dualidad de $\mathcal{B}$ en $\mathcal{A}$. Denotaremos por $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a una pareja de álgebras de Bose-Mesner en donde existe una dualidad, y en este caso diremos que $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ forman una *pareja dual* de álgebras de Bose-Mesner. En el caso de que la dualidad esté definida de $\mathcal{A}$ en sí misma, ψ es llamada una *dualidad fuerte* si satisface que $\psi^2 = n\tau$, donde τ denota al mapeo trasposición. A esta álgebra se le llama una álgebra de Bose-Mesner *autodual*.

Es fácil ver que la composición entre una dualidad y un BM-isomor–fismo es una dualidad. Además, la composición entre dualidades, bajo cierta normalización, es un BM-isomorfismo. Por otra parte, salvo la composición por un BM-isomorfismo, las dualidades entre álgebras de Bose-Mesner son únicas (ver [6]).

Proposición 4.4 *[6]. Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una pareja dual de álgebras de Bose-Mesner. Entonces se cumple lo siguiente:*

i) *Los números de intersección de $\mathcal{A}$ son iguales a los paramétros de Krein de $\mathcal{B}$ y viceversa.*

ii) *La primera eigenmatriz de $\mathcal{A}$ es igual a la segunda eigenmatriz de $\mathcal{B}$ y viceversa.*

iii) *Toda dualidad conmuta con el mapeo trasposición.*

De las ecuaciones (2.7) y (1.3) tenemos que el conjunto de caracteres de $\mathcal{A}$ es $\{\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n\}$, donde χ_j está definida por

$$A_i E_j = P_j(i) E_j = \chi_j(A_i) E_j.$$

En este caso, a $\hat{\mathcal{A}}$ la llamaremos la álgebra primal de caracteres del álgebra de Bose-Mesner $\mathcal{A}$. De manera ánaloga, viendo a $\mathcal{A}$ como un hipergrupo con la base de idempotentes, los caracteres están determinados por la ecuación (2.8) y en este caso diremos que $\hat{\mathcal{A}}$ es la álgebra dual de caracteres de $\mathcal{A}$. Obsérvese que el concepto de carácter es consistente con la Proposición 2.4.

El siguiente corolario es consecuencia inmediata de la Proposición 4.4.

Corolario 4.5 *Sea $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ una pareja dual de álgebras de Bose-Mesner. Entonces el álgebra primal de caracteres de $\mathcal{A}$ es igual al álgebra dual de caracteres de $\mathcal{B}$ y viceversa. En particular, si $\mathcal{A}$ es una álgebra de Bose-Mesner autodual se tiene que las álgebras primal y dual de caracteres coinciden.*

5 Conclusiones

En esencia, lo que hemos probado es que bajo cierta normalización de los elementos de la base de una álgebra de Bose-Mesner, ésta tiene el mismo comportamiento algebraico operacional de un hipergrupo. Más aún, las álgebras de Bose-Mesner están contenidas en un conjunto más grande, el conjunto de los hipergrupos. Por otro lado, viendo a una álgebra de Bose-Mesner como un hipergrupo, los conceptos de isomorfismos están determinados por sus álgebras de caracteres asociadas.

Agradecimientos

Agradezco a los evaluadores las sugerencias y correcciones realizadas a este trabajo. Asimismo, al Dr. Onésimo Hernández-Lerma por la revisión ortográfica y sugerencias. Este trabajo se realizó bajo la supervisión del Dr. Isidoro Gitler.

Isaías López
Departamento de Matemáticas
CINVESTAV-IPN
A.P. 14 – 740
México, D.F., C. P. 07000
México.
ilopez@math.cinvestav.mx

Referencias

[1] E. Bannai and T Ito. *Algebraic Combinatorics I.* Benjamin-Cummings, Menlo Park, C. A, 1989.

[2] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier. *Distance-Regular Graphs.* Springer-Verlag, Berlin, Heidedelberg, New York 1989.

[3] P. Delsarte. *An algebraic approach to the association achemes of coding theory*, Phillips Research Reports Supplements 10 (1973).

[4] C.F Dunkl. *The measure algebra of a locally compact hipergroup.* Trans. Amer. Math. Soc. 179,(1973), No. 32(1), 331-348.

[5] F. R. Gantmacher. *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, N. Y. 1960.

[6] I. Gitler and I. López. *Spin models, association schemes and* $\Delta - Y$ *transformations*, Morfismos, Vol. 3, No. 2 (1999), 31-55.

[7] R. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.

[8] F. Jaeger. *On Spin models, triply regular association schemes, and duality*, Journal of Algebraic Combinatorics 4 (1995), 103-144.

[9] R. I. Jewett. *Spaces with an abstract convolution of measures.* Adv. Math. 18(1975), 1-101.

[10] M. Koppinen. *On algebras with two multiplications, including Hopf algebras and Bose-Mesner algebras.* J. Alg. 182 (1996), 256-273.

[11] R. Spector. *Measures invariantes sur les hipergroupes.* Trans. Amer. Math. Soc. 239(1978), 147-165.

[12] N. J. Wildberger. *Lagrange's theorem and integrality for finite commutative hipergroups with applications to strongly regular graphs.* J. Alg. 182(1996), 1-37.

[13] N. J. Wildberger. *Finite commutative hipergroups and aplication from group theory to conformal field theory.* Contemporany Mathematics, Vol 183, Amer. Math. Soc., Providence(1995), 413-434.