

# Clasificación de superficies tóricas y producto de intersección

Saúl Israel Valdez López <sup>1</sup>

## Resumen

Las superficies tóricas normales se pueden describir por medio de una sucesión de vectores  $v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0$  en  $\mathbb{R}^2$  los cuales son definidos sobre la retícula  $\mathbb{Z}^2$ . Tales vectores están sujetos a relaciones de la forma:

$$a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1}, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

Este trabajo tiene como primer objetivo ampliar de forma detallada lo expuesto en el capítulo 10 de [3]. Específicamente, el teorema de clasificación de superficies tóricas suaves y compactas. Veremos que de este resultado podremos obtener una condición necesaria y suficiente únicamente en términos de los coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_d$  para determinar cuándo la sucesión de vectores en la ecuación de arriba produce una superficie tórica suave y compacta. El segundo objetivo será describir el producto de intersección de curvas invariantes bajo la acción del toro complejo  $(\mathbb{C}^*)^2$  en la superficie tórica en cuestión. Dicho producto de intersección también estará determinado por los coeficientes enteros anteriores.

*2020 Mathematics Subject Classification: 14M25*

*Frases y palabras clave: Cono, abanico, superficie tórica, blowing up.*

## 1 Introducción

Uno de los temas principales en geometría algebraica es el problema de clasificar variedades salvo cierta equivalencia previamente definida. Por ejemplo, consideremos la equivalencia birracional. Un resultado ya bien conocido (ver [7]) es el siguiente

---

<sup>1</sup>Este trabajo es una extensión de la tesis de maestría del autor escrita bajo la dirección del Dr. Miguel A. Xicotécatl Merino en el Departamento de Matemáticas del CINVESTAV-IPN.

**Teorema 1.1.** *Toda curva es birracionalmente equivalente a una curva proyectiva suave.*

Intentar dar un resultado de clasificación para variedades algebraicas de dimensión mayor es un problema considerablemente más complicado. Para el caso de variedades equipadas con una estructura compleja, como en el caso de superficies de Riemann, uno dispone de herramientas más sofisticadas para encontrar invariantes, por ejemplo, la primer clase de Chern de un haz de línea asociado a una superficie de Riemann compacta proporciona un invariante entero. Para superficies cuádricas en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$  en [10] se muestra el siguiente resultado

**Teorema 1.2.** *Cualquier superficie cuádrica suave en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$  se puede obtener de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  por el blowing up en dos puntos  $p_1, p_2 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$  y del blowing down de la transformación propia de la línea  $L \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$  que pasa por los puntos  $p_1, p_2$ .*

Para una superficie algebraica  $S$  más general (pero aún siendo equipada con estructura compleja) tenemos el número de Kodaira, denotado usualmente por  $k(S)$ , el cual se construye a partir de cohomología de gavillas. Por ejemplo se tiene el siguiente resultado, el lector encontrará una prueba en [6]

**Teorema 1.3.** *Sea  $S$  una superficie algebraica que resulta de encajar una variedad compleja compacta de dimensión 2 en un espacio proyectivo. Entonces*

- (a) *Si  $k(S) = 1$ , la superficie  $S$  es elíptica.*
- (b) *Si  $S$  es una superficie minimal con  $k(S) = -1$  entonces  $S$  es o bien  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  o una superficie reglada.*

En el caso de superficies tóricas suaves y compactas demostraremos en la sección 3 el siguiente teorema

**Teorema 1.4.** *Toda superficie tórica suave y compacta se obtiene o bien de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  o de una superficie de Hirzebruch  $\mathcal{H}_a$  por una sucesión de blowing up en los puntos fijos por la acción del toro complejo  $(\mathbb{C}^*)^2$ .*

Una superficie tórica  $X$  tiene asociada una sucesión de vectores

$$(v_1, v_2, \dots, v_d)$$

en  $\mathbb{R}^2$  cuyas entradas son números enteros. Dicha sucesión de vectores se relacionan mediante coeficientes enteros  $a_1, a_2, \dots, a_d$  por

$$(1) \quad a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1}, \quad a_i \in \mathbb{Z}.$$

El siguiente resultado, que demostraremos en la parte final de la sección 3, proporciona un criterio para determinar cuando tal sucesión de vectores corresponde a una superficie tórica suave y compacta.

**Teorema 1.5.** *Dada una sucesión de vectores  $(v_1, v_2, \dots, v_d)$  en  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  tal que satisface ecuaciones de la forma*

$$a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1}, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

*corresponde a una variedad tórica suave y compacta si y solo si*

$$a_1 + \dots + a_d = 3d - 12.$$

En la sección 4 estudiaremos el producto de intersección de ciertos divisores de una superficie tórica suave y compacta (aquellos que son invariantes bajo la acción del toro  $(\mathbb{C}^*)^2$ ) y veremos que tal producto también estará determinado por los coeficientes enteros de la ecuación (1). Concretamente, si  $X$  es una superficie tórica suave y compacta y  $(v_1, v_2, \dots, v_d)$  su correspondiente sucesión de vectores, cada vector (llamado arista)  $v_i$  produce una curva irreducible en  $X$ , denotada por  $D_i$ , isomorfa a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Estas curvas tienen auto-intersección dada por

$$D_i \cdot D_i = -a_i.$$

## 2 Conceptos Básicos

### 2.1 Conos y variedades tóricas afines

El prototipo inicial de una variedad tórica es la variedad afín  $(\mathbb{C}^*)^n$  la cual es un grupo bajo la operación de multiplicación componente a componente. Una variedad tórica  $X$  es una variedad algebraica irreducible que contiene a algún toro  $(\mathbb{C}^*)^n$  como un subconjunto abierto y la acción de dicho toro en sí mismo se extiende a todo  $X$ . Una característica fundamental de la variedad  $(\mathbb{C}^*)^n$  es que todo caracter  $\chi : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{C}^*$  es de la forma

$$(2) \quad \chi(z_1, \dots, z_n) = z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n},$$

donde  $(a_1, \dots, a_n) = m \in \mathbb{Z}^n$ . Así, denotamos a un caracter como en (2) por  $\chi^m$ . Dicho lo anterior, una forma natural de construir variedades

tóricas es como sigue: tomemos  $\alpha = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}^{kn}$  en donde consideramos  $m_i \in \mathbb{Z}^n$  y tomemos el mapeo

$$(3) \quad \begin{aligned} \varphi_\alpha : (\mathbb{C}^*)^n &\rightarrow \mathbb{C}^k \\ z &\mapsto (\chi^{m_1}(z), \dots, \chi^{m_k}(z)) \end{aligned}$$

Al tomar la cerradura de Zariski de la imagen de  $\varphi_\alpha$  obtenemos una variedad tórica afín  $X_\alpha$  en  $\mathbb{C}^k$ . La parte importante aquí es la elección del vector  $\alpha = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{Z}^{kn}$  ya que el ideal  $I$  correspondiente a la variedad afín  $X_\alpha$  estará determinado por monomios de la forma

$$(4) \quad z_1^{a_1} z_2^{a_2} \cdots z_k^{a_k} = z_1^{b_1} z_2^{b_2} \cdots z_k^{b_k},$$

donde las entradas de los vectores  $(a_1, \dots, a_k), (b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{Z}^k$  verifican ecuaciones de la forma

$$(5) \quad \sum_{i=1}^k c_i m_i = \sum_{i=1}^k d_i m_i, \quad c_i, d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Tomando como punto de partida la ecuación (5), una manera fructífera de construir variedades tóricas es a partir de conos poliédricos convexos y sus respectivos conos duales. Para intereses de este trabajo nos limitaremos a definir estos objetos en el plano real y los llamaremos simplemente conos.

**Definición 2.1.1.** Sean  $v_1, v_2$  vectores en la retícula  $\mathbb{Z}^2$  linealmente independientes. El cono generado por  $v_1, v_2$  se define por

$$\sigma = \{r_1 v_1 + r_2 v_2 : r_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

Utilizamos la notación  $\sigma = (v_1, v_2)$ .

**Definición 2.1.2.** Dado un cono  $\sigma = (v_1, v_2)$  definimos el cono dual de  $\sigma$  denotado por  $\check{\sigma}$ , como el conjunto

$$\check{\sigma} = \{u \in \mathbb{R}^2 : \langle u, v_i \rangle \geq 0, \quad i = 1, 2.\}$$

Notemos que si fijamos  $v_i$ , el conjunto de vectores  $u \in \mathbb{R}^2$  con  $\langle u, v_i \rangle \geq 0$  conforman un semiplano cuya frontera está determinada por los vectores ortogonales a  $v_i$ . Así,  $\check{\sigma}$  es la intersección de tales semiplanos y tenemos  $\check{\sigma} = (w_1, w_2)$ , donde  $w_1, w_2$  son vectores ortogonales a  $v_1, v_2$ , respectivamente. Este es un caso muy particular del lema de Farkas (véase [9]), un resultado importante en geometría convexa.

**Lema 2.1.3.** *Sea  $\sigma$  un cono en  $\mathbb{R}^2$  y  $\check{\sigma}$  su respectivo cono dual. Entonces el conjunto  $S_\sigma = \check{\sigma} \cap \mathbb{Z}^2$  es un monoide finitamente generado por un conjunto de vectores en la retícula  $\mathbb{Z}^2$ .*

*Proof.* Pongamos  $\check{\sigma} = (w_1, w_2)$ . La clave es definir el conjunto

$$A = \{t_1 w_1 + t_2 w_2 : t_1, t_2 \in [0, 1]\}.$$

Posteriormente tomamos la intersección  $A \cap \mathbb{Z}^2$  la cual resulta en un conjunto discreto en el conjunto compacto  $A$ . Así,  $A \cap \mathbb{Z}^2$  es finito digamos  $A \cap \mathbb{Z}^2 = \{u_1, \dots, u_k\}$ , luego este conjunto genera a  $S_\sigma$  como monoide.  $\square$

Dado un vector  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  en la retícula  $\mathbb{Z}^k$  denotamos por  $z^\alpha$  al monomio  $z_1^{\alpha_1} \cdots z_k^{\alpha_k}$  en el álgebra de polinomios de Laurent

$$\mathbb{C}[z_1^{\pm 1}, \dots, z_k^{\pm 1}].$$

Construimos una superficie tórica asociada a un cono  $\sigma$ , denotada por  $X_\sigma$ , de la siguiente manera.

**Definición 2.1.4.** Sea  $\sigma$  un cono en  $\mathbb{R}^2$  y  $S_\sigma = \langle u_1, u_2, \dots, u_k \rangle$  su respectivo monoide. La superficie tórica asociada al cono  $\sigma$  se define como la variedad afín  $V(J_\sigma)$  donde  $J_\sigma$  es un ideal en  $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_k]$  generado por número finito de monomios de la forma

$$z^\alpha - z^\beta,$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$  son vectores en  $\mathbb{Z}^k$  cuyas entradas son no negativas y satisfacen ecuaciones de la forma

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^k \beta_i u_i.$$

**Ejemplo 2.1.5.** El ejemplo típico es la superficie tórica asociada al cono  $\sigma = (2e_1 - e_2, e_2)$  (donde  $\{e_1, e_2\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ ). El cono dual está dado por  $\check{\sigma} = (e_1^*, e_1^* + 2e_2^*)$ . Aplicando el procedimiento empleado en la demostración del lema 1 obtenemos

$$\begin{aligned} t_1 e_1^* + t_2 (e_1^* + 2e_2^*) &\in \mathbb{Z}^2 \\ \Leftrightarrow t_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así,  $S_\sigma = \langle e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^* \rangle$ . Luego  $X_\sigma = V(z_1 z_2 - z_3^2)$ .

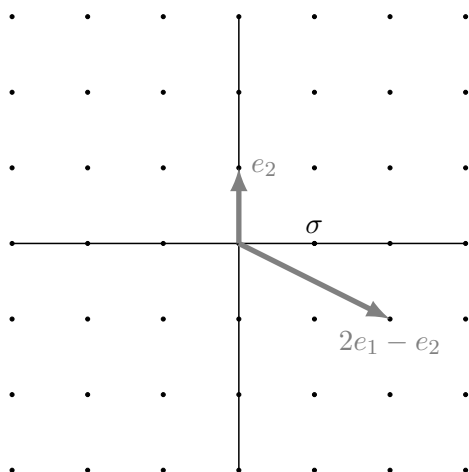


Figure 1:

**Ejemplo 2.1.6.** Si tomamos el cono  $\sigma = (e_1, e_2)$  (figura 2) tenemos que  $X_\sigma = \mathbb{C}^2$ . Por otra parte, si consideramos el cono  $\mu = (e_2)$  resulta que  $S_\mu = \langle e_1^*, e_2^*, -e_1^* \rangle$ . Así,

$$X_\mu = V(z_1 z_3 - 1) \subset \mathbb{C}^3.$$

Entonces  $X_\mu \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ .

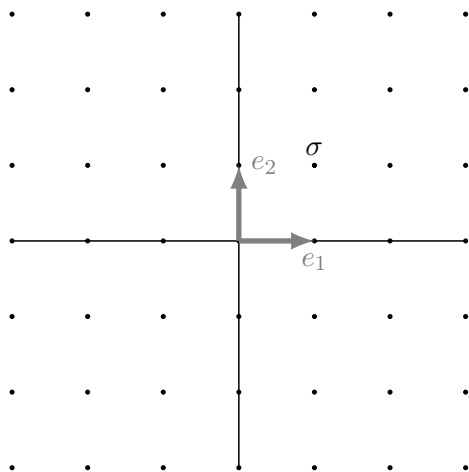


Figure 2:

**Ejemplo 2.1.7.** Consideremos  $\sigma = (2e_1 + 3e_2, 2e_1)$  (ver figura 3). El cono dual  $\check{\sigma}$  es generado por los vectores  $3e_1^* - 2e_2^*, 2e_2^*$ . Ya que los números 3 y 2 son primos relativos obtenemos

$$\begin{aligned} t_1(3e_1^* - 2e_2^*) + t_2 2e_2^* &\in \mathbb{Z}^2 \\ \Leftrightarrow t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

por lo que  $S_\sigma = \langle 3e_1^* - 2e_2^*, e_2^*, e_1^* \rangle$ . Entonces  $X_\sigma = V(z_1 z_2^2 - z_3^3)$ .

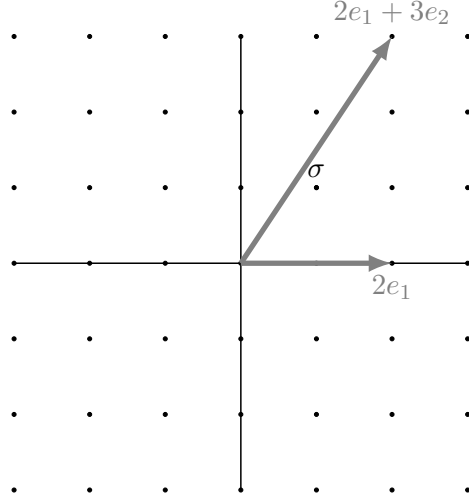


Figure 3:

**Ejemplo 2.1.8.** Consideremos el cono  $\sigma_m = (me_1, e_2)$  con dual  $\check{\sigma}_m = (e_1^* + me_2^*, e_1^*)$ . Haciendo el procedimiento que se realiza en el lema 2.1.3 (como en los ejemplos anteriores) obtenemos

$$S_{\sigma_m} = \langle e_1^*, e_1^* + e_2^*, \dots, e_1^* + me_2^* \rangle.$$

Notemos que como vectores coordenados los generadores de  $S_\sigma$  satisfacen

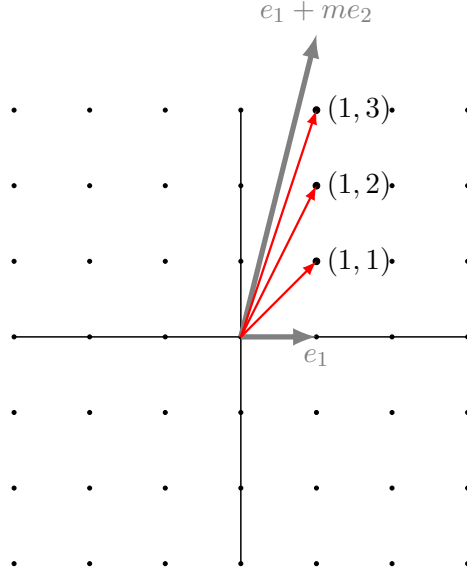
$$(1, i) + (1, j) = (1, i + 1) + (1, j - 1), \quad 0 \leq i, j \leq m$$

por lo cual la variedad tórica correspondiente es el cono normal racional de grado  $m$  dado por

$$X_{\sigma_m} = V(z_i z_j - z_{i+1} z_{j-1}) \subset \mathbb{C}^{m+1}.$$

## 2.2 Abanicos

Para construir variedades tóricas algebraicas a partir de conos se introduce el concepto de abanico. Recordemos que la manera usual de construir variedades algebraicas es por medio de un pegado adecuado de variedades afines. Esta misma idea la trasladamos a los conos.


 Figure 4: Generadores de  $S_{\sigma_m}$ 

**Definición 2.2.1.** Sea  $\Delta$  un conjunto de conos en  $\mathbb{R}^2$ . Decimos que  $\Delta$  es un abanico si se satisfacen las siguientes condiciones

- (a) Si  $\sigma \in \Delta$  y  $\mu \leq \sigma$  entonces  $\mu \in \Delta$
- (b) Si  $\sigma, \mu \in \Delta$  entonces  $\sigma \cap \mu \in \Delta$ .

Dado un abanico  $\Delta$  en  $\mathbb{R}^2$  y conos  $\sigma = (v_i, v_{i+1}), \mu = (v_{i+1}, v_{i+2})$  en  $\Delta$ , se sigue de geometría convexa que

$$\check{\sigma} = (u_i, u_{i+1}), \quad \check{\mu} = (-u_{i+1}, u_{i+2}).$$

Entonces cuando tomamos  $S_\sigma$  y  $S_\mu$ , y las identificaciones pertinentes, tenemos que  $\alpha, \alpha^{-1}$  forman parte de las coordenadas de  $X_\sigma$  y  $X_\mu$ , respectivamente. Específicamente,  $X_\sigma = \mathbb{C}_{(\alpha)} \times \mathbb{C}$  y  $X_\mu = \mathbb{C}_{(\alpha^{-1})} \times \mathbb{C}$ . Ahora tomemos el isomorfismo  $\tau_{\sigma \cap \mu} : \mathbb{C}_{(\alpha)}^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_{(\alpha^{-1})}^* \times \mathbb{C}$  tal que  $(\alpha, ; ) \mapsto (\alpha^{-1}, ; )$ . De esta forma construimos una superficie algebraica asociada a un abanico en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 2.2.2.** Sea  $\Delta$  un abanico en  $\mathbb{R}^2$ . Llamaremos superficie tórica algebraica o simplemente superficie tórica, si no hay lugar a confusión, al conjunto

$$X_\Delta = \coprod_{\sigma \in \Delta} X_\sigma / \sim,$$



donde la relación de equivalencia  $\sim$  está dada por  $x \sim y$  si y solo si  $\tau_{\sigma\cap\mu}(y) = x$ , para algún par de conos  $\sigma, \mu$ .

**Ejemplo 2.2.3.** Consideremos el abanico  $\Delta$  conformado por los conos

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (e_1, e_2), \\ \sigma_2 &= (e_2, -e_1 - e_2), \\ \sigma_3 &= (-e_1 - e_2, e_1), \end{aligned}$$

y sus respectivas caras. Cada cono  $\sigma_i$  genera un plano complejo  $\mathbb{C}^2$  donde las coordenadas están en términos de los generadores de los monoides  $S_{\sigma_1}, S_{\sigma_2}$  y  $S_{\sigma_3}$ . En este caso

$$\begin{aligned} S_{\sigma_1} &= \langle e_1^*, e_2^* \rangle, \\ S_{\sigma_2} &= \langle -e_1^*, -e_1^* + e_2^* \rangle, \\ S_{\sigma_3} &= \langle -e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle. \end{aligned}$$

De la información anterior obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{(x,y)}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}_{(x^{-1},x^{-1}y)}^2 \\ \downarrow & & \\ \mathbb{C}_{(y^{-1},xy^{-1})}^2 & & \end{array}$$

Las coordenadas indican cómo se llevará a cabo el pegado de los planos. Haciendo  $x = \frac{x_1}{x_0}$  y  $y = \frac{x_2}{x_0}$  obtenemos la cubierta afín de  $\mathbb{CP}^2$ .

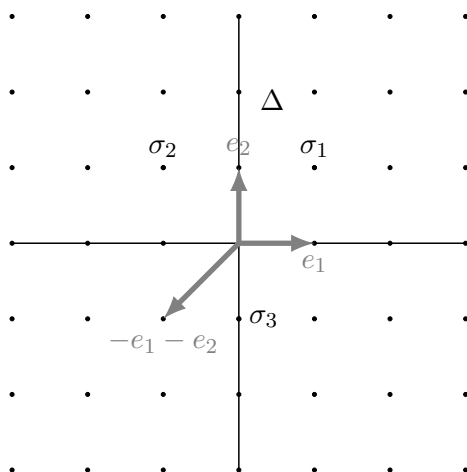


Figure 5: Abanico correspondiente a  $\mathbb{CP}^2$ .

**Ejemplo 2.2.4.** Consideremos el abanico  $\Delta_1$  que se muestra en la figura 6. Podemos observar que

$$\begin{aligned} S_{\sigma_1} &= \langle e_1^*, e_2^* \rangle \\ S_{\sigma_2} &= \langle -e_1^*, e_2^* \rangle. \end{aligned}$$

Entonces la cubierta afín de  $X_{\Delta_1}$  está dada por  $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(x,y)}^2$  y  $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(x^{-1},y)}^2$ . Esto da como resultado la variedad  $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$ .

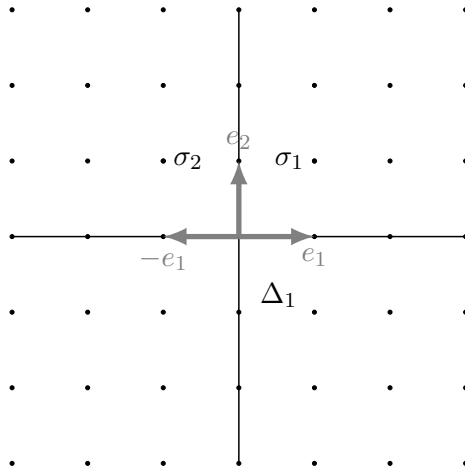


Figure 6:

Por otra parte, consideremos el abanico  $\Delta_2$  que se muestra en la figura 7. Si removemos el vector  $e_1 + e_2$  tenemos simplemente el cono  $\mu = (e_1, e_2)$  al cual le corresponde el plano complejo  $\mathbb{C}_{(x,y)}^2$ . Cuando insertamos el vector  $e_1 + e_2$  obtenemos

$$\begin{aligned} S_{\mu_1} &= \langle e_2^*, e_1^* - e_2^* \rangle \\ S_{\mu_2} &= \langle e_1^*, -e_1^* + e_2^* \rangle. \end{aligned}$$

Entonces  $X_{\mu_1} = \mathbb{C}_{(y,xy^{-1})}^2$  y  $X_{\mu_2} = \mathbb{C}_{(x,x^{-1}y)}^2$ . El mapeo de pegado está dado por

$$(y, xy^{-1}) \mapsto (yxy^{-1}, \frac{1}{xy^{-1}}), \quad xy^{-1} \neq 0$$

Tomando  $xy^{-1} = \frac{x_0}{x_1}$  obtenemos

$$X_{\Delta_2} \cong V(yx_0 - xx_1) \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1.$$

Esta variedad algebraica corresponde al blowing up de  $\mathbb{C}^2$  en el origen.

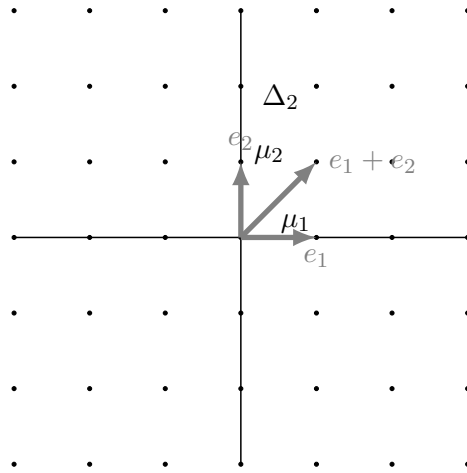


Figure 7:

En el siguiente ejemplo definiremos la superficie de Hirzebruch que, junto al plano proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ , son las superficies de las que se obtendrán las demás superficies tóricas suaves y compactas.

**Ejemplo 2.2.5.** La superficie de Hirzebruch con parámetro  $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\mathcal{H}_a$ , tiene asociada el abanico  $\Delta_a$  que se muestra en la figura 8.

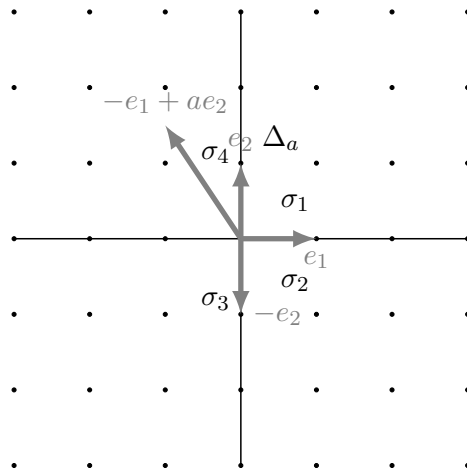


Figure 8:

Los monoides de estos conos están dados por

$$\begin{aligned}
 S_{\sigma_1} &= \langle e_1^*, e_2^* \rangle, \\
 S_{\sigma_2} &= \langle e_1^*, -e_2^* \rangle, \\
 S_{\sigma_3} &= \langle -e_1^*, -ae_1^* - e_2^* \rangle, \\
 S_{\sigma_4} &= \langle -e_1^*, ae_1^* + e_2^* \rangle.
 \end{aligned}$$

Entonces las superficies tóricas correspondientes a los conos de  $\Delta_a$  son planos complejos y estos se pegan como lo muestra el diagrama (6).

$$(6) \quad \begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}_{(x,y)}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}_{(x,y^{-1})}^2 \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C}_{(x^{-1},x^ay)}^2 & \longleftarrow & \mathbb{C}_{(x^{-1},x^{-a}y^{-1})}^2
 \end{array}$$

Como en el ejemplo 2.2.4, al pegar  $X_{\sigma_1}, X_{\sigma_2}$  obtenemos la variedad  $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$  con coordenadas

$$\begin{aligned}
 &(x, [1 : y]), \quad y \neq 0 \\
 &(x, [1 : 0]) \\
 &(x, [0 : 1])
 \end{aligned}$$

Para  $X_{\sigma_3}$  y  $X_{\sigma_4}$  tenemos

$$\begin{aligned}
 &(x^{-1}, [1 : x^ay]), \quad x^ay \neq 0 \\
 &(x^{-1}, [1 : 0]), \\
 &(x^{-1}, [0 : 1]).
 \end{aligned}$$

Así, la superficie de Hirzebruch se obtiene de pegar las variedades  $\mathbb{C}_{(x)} \times \mathbb{CP}^1$  y  $\mathbb{C}_{(x^{-1})} \times \mathbb{CP}^1$ . Notemos que si tomamos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}_{(x)} &\cong U_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{CP}^1 : x_0 \neq 0\} \\
 \mathbb{C}_{(x^{-1})} &\cong U_1 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{CP}^1 : x_1 \neq 0\},
 \end{aligned}$$

obtenemos un  $\mathbb{CP}^1$ -haz sobre  $\mathbb{CP}^1$  con funciones de transición dadas por

$$(7) \quad (x, [1 : y]) \mapsto (x^{-1}, [1 : x^ay]).$$

Así, tenemos un haz  $\mathcal{H}_a \rightarrow \mathbb{CP}^1$  con fibra  $\mathbb{CP}^1$ . De hecho, este haz puede representarse como la proyectivización de la suma de Whitney del haz  $\mathcal{O}(a)$  y del haz trivial  $\mathcal{O} = \mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$ . En efecto, recordemos que la suma de Whitney se obtiene del pullback del mapeo diagonal  $d$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{O}(a) \times \mathcal{O} \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \mathbb{C}\mathbb{P}^1 & \xrightarrow{d} & \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1
 \end{array}$$

de manera que las fibras de  $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}$  son isomorfas a  $\mathbb{C}^2$ . Por otra parte, las funciones de transición del haz  $\mathcal{O}(a)$  están dadas por

$$([x_0 : x_1], y) \mapsto ([x_0 : x_1], \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^a y), \quad [x_0 : x_1] \in U_0 \cap U_1.$$

Entonces, al proyectivizar las fibras de  $\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}$  y tomar  $x = \frac{x_1}{x_0}$  en (7) se sigue que  $\mathcal{H}_a \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O})$ .

La superficie de Hirzebruch es una variedad algebraica importante de hecho, en [1] se prueba que  $\mathcal{H}_a$  clasifica, salvo isomorfismo, a todas las superficies geoméricamente regladas sobre  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ . Por otro lado, los haces de línea sobre  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  son, salvo isomorfismo, de la forma  $\mathcal{O}(a)$  para algún entero  $a$ . La afirmación anterior se puede consultar en [8]. Utilizaremos estos haces en la sección 4 para calcular números de intersección de curvas sobre una superficie tórica.

### 2.3 La acción de $(\mathbb{C}^*)^2$

Una cualidad fundamental de las variedades tóricas en general es la acción que ejerce el grupo  $(\mathbb{C}^*)^n$  (bajo multiplicación componente a componente) donde  $n$  es la dimensión de la variedad en cuestión, en el caso de superficie tóricas tenemos  $n = 2$ .

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $X_\sigma$  una superficie tórica afín asociada al monoide  $S_\sigma = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ . Entonces la acción de  $(\mathbb{C}^*)^2$  sobre  $X_\sigma$  está dada por*

$$\begin{aligned}
 \tau_\sigma : (\mathbb{C}^*)^2 \times X_\sigma &\rightarrow X_\sigma \\
 (t, x) &\mapsto (t^{u_1} x, \dots, t^{u_k} x).
 \end{aligned}$$

*Proof.* Notemos que  $\tau_\sigma$  está bien definida. En efecto, la variedad afín  $X_\sigma$  está determinada por las ecuaciones polinomiales

$$z_1^{a_1} z_2^{a_2} \dots z_k^{a_k} = z_1^{b_1} z_2^{b_2} \dots z_k^{b_k}$$

en donde los exponentes  $a_i$  y  $b_i$  satisfacen (5) respecto a los vectores  $u_1, \dots, u_k$ . Así,

$$t^{a_1 u_1} x_1^{a_1} \cdots t^{a_k u_k} x_k^{a_k} - t^{b_1 u_1} x_1^{b_1} \cdots t^{b_k u_k} x_k^{b_k} = t^{\sum_{i=1}^k u_i} \left( \prod_{i=1}^k x_i^{a_i} - \prod_{i=1}^k x_i^{b_i} \right),$$

por lo cual se sigue que  $\tau_\sigma(t, x) \in X_\sigma$ . De las propiedades básicas de los exponentes tenemos que  $\tau_\sigma$  es una acción sobre  $X_\sigma$ .  $\square$

**Ejemplo 2.3.2.** Para el caso de la superficie tórica afín  $X_\sigma = V(z_1 z_2 - z_3^2)$  la acción es de la forma

$$\tau_\sigma : (t, x) \mapsto (t_1 x_1, t_1 t_2^2 x_2, t_1 t_2 x_3).$$

Si tomamos el punto  $x = (1, 1, 1)$  obtenemos un encaje

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^*)^2 &\rightarrow X_\sigma \\ (t_1, t_2) &\mapsto (t_1, t_1 t_2^2, t_1 t_2). \end{aligned}$$

En general, todas las superficies tóricas contienen al punto  $(1, \dots, 1)$  (ver definición 2.1.4), su órbita produce al toro  $(\mathbb{C}^*)^2$ .

**Observación 2.3.3.** La acción definida anteriormente es compatible con las funciones de pegado cuando consideramos abanicos.

El estudio de las órbitas en una superficie tórica (también para variedades tóricas en general) puede traducirse en términos de la combinatoria de su correspondiente abanico como sigue. Tomemos nuevamente la superficie  $X_\sigma = V(z_1 z_2 - z_3^2)$ . Sea  $(x, xy^2, xy)$  un punto en la órbita del punto  $(1, 1, 1)$  y  $(a, b, c) \in X_\sigma$  tal que ninguna entrada es cero. En tal caso tenemos

$$(x, xy^2, xy) = (ax', bx'y'^2, cx'y'),$$

donde  $x' = a^{-1}x$  y  $y' = ac^{-1}y$ . Entonces, las órbitas relevantes serán aquellas correspondientes a puntos con alguna entrada cero. Por ejemplo, consideremos el plano proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .

Los planos  $X_{\sigma_1}$  y  $X_{\sigma_2}$  se pegan por medio del mapeo  $x \mapsto x^{-1}$  de manera que se pegan a lo largo de un toro  $\mathbb{C}^*$ . Notemos que el mapeo anterior puede obtenerse considerando los vectores ortogonales a  $v_1$  y hacer las identificaciones pertinentes. De esta forma, asociamos al vector  $v_2$  una variedad tórica de dimensión 1,  $X_{v_2} \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ , con ciertas coordenadas tal que se encaja en  $X_{\sigma_1}$  y  $X_{\sigma_2}$  como

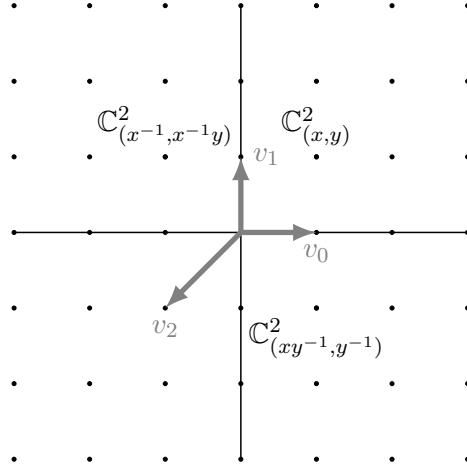
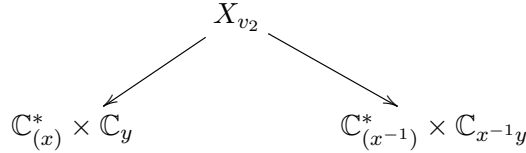


Figure 9: Esquema de pegado de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .



Respecto a las órbitas, el caso que nos interesa es cuando  $y = 0, x^{-1}y = 0$ . Para ver esto en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  hacemos  $x = x_1/x_0$  y  $y = x_2/x_0$  de manera que cuando  $x \neq 0$  tenemos

$$\{(x, y), (x^{-1}, x^{-1}y)\} \leftrightarrow [1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{x_2}{x_1}],$$

por lo cual, si  $y = 0, x^{-1}y = 0$  tenemos en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  los puntos de la forma  $[1 : \frac{x_1}{x_0} : 0]$ , con  $\frac{x_1}{x_0} \neq 0$ . Tomando la acción de  $(\mathbb{C}^*)^2$  obtenemos

$$\begin{aligned} (t_1, t_2) \cdot [1 : 1 : 0] &\mapsto (t_1, t_2) \cdot (1, 0) = (t_1, 0) \in X_{\sigma_1} \\ &\mapsto (t_1, t_2) \cdot (1, 0) = (t_1^{-1}, 0) \in X_{\sigma_2}. \end{aligned}$$

Esta órbita es isomorfa a  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 - \{[1, 0], [0, 1]\}$ , tomando su cerradura en  $X_\Delta$  obtenemos la línea proyectiva.

**Observación 2.3.4.** Recordemos que dado un abanico  $\Delta$  en  $\mathbb{R}^2$  y conos  $\sigma = (v_i, v_{i+1}), \mu = (v_{i+1}, v_{i+2})$  en  $\Delta$ , tenemos que  $\check{\sigma} = (u_i, u_{i+1}), \check{\mu} = (-u_{i+1}, u_{i+2})$  y

$$\mathbb{C}^*_{(\alpha)} \times \mathbb{C} \subset X_\sigma, \mathbb{C}^*_{(\alpha^{-1})} \times \mathbb{C} \subset X_\mu.$$

Con base a la definición 2.2.2 los puntos  $(\alpha, 0) \in X_\sigma$  y  $(\alpha^{-1}, 0) \in X_\mu$  se identifican bajo el mapeo  $\tau_{\sigma \cap \mu} : (\alpha, 0) \mapsto (\alpha^{-1}, 0)$ . Ahora asociamos al vector  $v_i$  la órbita de la forma

$$\{(\alpha, 0), (\alpha^{-1}, 0)\} \subset X_\sigma \amalg X_\mu / \sim,$$

al tomar su cerradura en  $X_\Delta$  obtenemos una curva isomorfa a  $\mathbb{CP}^1$ . Denotaremos a esta subvariedad de  $X_\Delta$  por  $D_i$ .

### 3 Clasificación de superficies

Las propiedades de suavidad y compacidad de una superficie tórica pueden ser deducidas a partir de la combinatoria del abanico correspondiente a dicha superficie tal y como lo enuncia el siguiente resultado (el lector podrá consultar una prueba en [5]).

**Teorema 3.1.** *Sea  $\Delta$  un abanico en  $\mathbb{R}^2$  y  $X_\Delta$  su respectiva superficie tórica.*

- (a) *La superficie  $X_\Delta$  es suave si y solo si para cada cono  $\sigma = (v, w) \in \Delta$  tenemos  $\det(v, w) = \pm 1$ .*
- (b) *La superficie  $X_\Delta$  es compacta si y solo si para todo punto  $p \in \mathbb{R}^2$  existe un cono  $\sigma \in \Delta$  tal que  $p \in \sigma$ .*

En el ejemplo 2.1.5 tenemos la cónica  $V(xy - z^2)$  la cual tiene una singularidad en el origen. Por otro lado,

$$\det(2e_1 - e_2, e_2) = 2.$$

La superficie tórica  $\mathbb{C} \times \mathbb{CP}^1$  no es compacta y como se puede observar en el ejemplo 2.2.4 el abanico  $\Delta_1$  no cumple las condiciones del teorema 3.1, tales abanicos son llamados completos. El plano proyectivo  $\mathbb{CP}^2$  es compacto y como se puede observar en el ejemplo 2.2.3 su respectivo abanico es completo.

**Observación 3.2.** Notemos que la única superficie tórica afín suave es  $\mathbb{C}^2$ . Entonces una superficie tórica se obtiene de pegar planos complejos conforme a las relaciones monomiales que surgen de los conos duales.

Ahora bien, sea  $X$  una superficie tórica suave y compacta. Del teorema 3.1 se sigue que el abanico  $\Delta$  asociado a  $X$  está conformado por una



sucesión de vectores  $v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0$  tales que  $\det(v_{-1}, v_i) = 1$ , para  $i = 1, \dots, d$ .

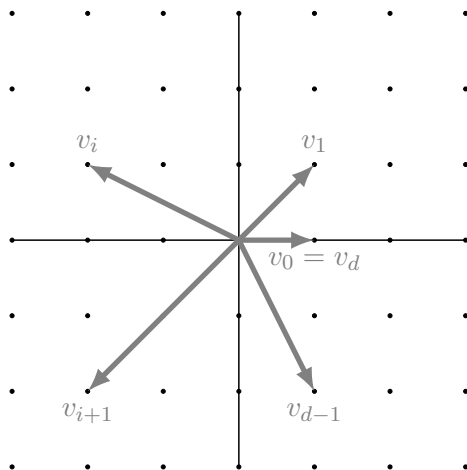


Figure 10: Bosquejo de un abanico asociado a una superficie tórica suave y compacta.

Dada una superficie tórica suave y compacta denotamos por

$$(v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0)$$

a su respectivo abanico. Las relaciones mostradas en (1) entre estos vectores se obtienen como sigue. Consideremos los vectores  $v_{i-1}, v_i$  y  $v_{i+1}$ . Ya que  $\{v_{i-1}, v_i\}$  es una base para la retícula  $\mathbb{Z}^2$  (como  $\mathbb{Z}$ -módulo) existen enteros  $a_i, b_i$  tales que

$$v_{i+1} = a_i v_i + b_i v_{i-1}.$$

Al calcular el determinante de  $\{v_i, v_{i+1}\}$  respecto a la base  $\{v_{i-1}, v_i\}$  obtenemos

$$\det(v_i, v_{i+1}) = \begin{vmatrix} 0 & b_i \\ 1 & a_i \end{vmatrix} = -b_i$$

por lo que  $b_i = -1$ . Así,  $a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, d$ .

Seguiremos una serie de pasos para demostrar el teorema 1.4.

**Teorema 3.3.** [Primer teorema de clasificación] Sea  $X_\Delta$  una superficie tórica suave y compacta donde  $\Delta = (v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0)$ .

- (a) Si  $d = 3$ , entonces  $X_\Delta \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^2$   
 (b) Si  $d = 4$ , entonces  $X_\Delta \cong \mathcal{H}_a$ , para algún  $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

*Proof.* (a) Si  $\Delta = (v_0, v_1, v_2 = v_3)$  obtenemos las igualdades

$$\begin{aligned} a_1 v_1 &= v_0 + v_2, \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} &= -a_1 = 1, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se calcula el determinante de los vectores  $v_2, v_0$ , respecto a la base  $\{v_0, v_1\}$ . Luego  $v_2 = -v_0 - v_1$  por lo cual del ejemplo 2.2.3 tenemos que  $\Delta$  produce la variedad tórica  $X_\Delta \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .

(b) Para el caso  $d = 4$  tenemos las relaciones

$$a_1 v_1 = v_0 + v_2, \quad a_3 v_3 = v_0 + v_2.$$

Las igualdades anterior implican que  $a_1 v_1 = a_3 v_3$ . Por otro lado,  $a_4 v_0 = v_3 + v_1$ , de donde se sigue la igualdad

$$a_1 a_4 v_0 = (a_1 + a_3) v_3.$$

Entonces o bien  $a_1 = 0 = a_3$  o  $a_4 = 0$ , en cualquier caso, del ejemplo 2.2.5 obtenemos una superficie de Hirzebruch  $\mathcal{H}_a$  para algún  $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .  $\square$

Como se mostró en el ejemplo 2.2.4, al subdividir el cono  $\sigma = (e_1, e_2)$  insertando el vector  $e_1 + e_2$  la variedad que obtenemos es el blowing up de  $\mathbb{C}^2$  en el origen. En general, si  $v_1, v_2$  son vectores en la retícula  $\mathbb{Z}^2$  con determinante  $\pm 1$ , entonces la superficie tórica  $X$  que produce el abanico conformado por  $\{(v_1, v_1 + v_2), (v_1 + v_2, v_2)\}$  y sus caras es el blowing up de  $\mathbb{C}^2$  en el origen.

**Observación 3.4.** Recordemos que dados dos vectores  $u, v \in \mathbb{R}^2$  utilizamos la notación  $\sigma = (u, v)$  para describir al cono  $\sigma$  generado por tales vectores con base a la definición 2.1.1. En lo que sigue, siempre que no haya confusión, utilizaremos solo el símbolo  $(u, v)$  para denotar al cono cuyos generadores son los vectores  $u, v$ .

**Lema 3.5.** Sea  $\Delta = (v_0, v_1, \dots, v_d = v_0)$  un abanico correspondiente una variedad tórica suave y compacta. No existen dos conos  $\sigma_i = (v_i, v_i + 1)$  y  $\sigma_j = (v_j, v_j + 1)$  tales que  $v_j \in (v_{i+1}, -v_i)$  y  $v_{j+1} \in (-v_i, -v_{i+1})$ .

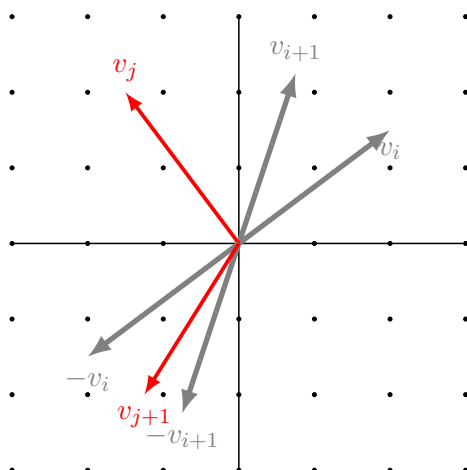


Figure 11: Aquí  $v_j$  se encuentra en el cono generado por  $v_{i+1}$  y  $-v_i$ .

*Proof.* Haremos la prueba por contradicción. Supongamos que existen índices  $i, j$  tales que tenemos la configuración que se muestra en figura de arriba. Existen enteros  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{>0}$  tales que

$$\begin{aligned} v_j &= -av_i + bv_{i+1} \\ v_{j+1} &= -cv_i - dv_{i+1} \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\det(v_j, v_{j+1}) = 1$  en cualquier base, por lo que

$$\begin{vmatrix} -a & -c \\ b & -d \end{vmatrix} = ad + bc = 1$$

lo cual es una contradicción. □

**Lema 3.6.** *Sea  $\Delta = (v_0, v_1, \dots, v_d = v_0)$  un abanico correspondiente una variedad tórica suave y compacta. Entonces*

- (a) *Para  $d \geq 4$ , existe un par de índices  $i, j$  tales que  $v_j = -v_i$ .*
- (b) *Supongamos que  $v_i = -v_0$  y  $i \geq 3$ . Entonces existe un índice  $j$  tal que*

$$v_i = v_{j-1} + v_{j+1}, \quad 0 < j < i.$$

*Proof.* (a) Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $v_0 = e_1$ . El caso  $d = 4$  se probó en el lema anterior por lo que podemos suponer que  $d \geq 5$ . Sea  $\alpha$  el mayor índice tal que  $v_\alpha$  se encuentra en el semiplano cerrado  $H_{e_2}^+$ . Si  $v_\alpha = -v_0$  terminamos. También en el caso de que  $v_{\alpha+1} = -v_0$ . Entonces  $v_{\alpha+1}$  está en el semiplano inferior  $H_{-e_2}$ . Si  $v_1 =$

$-v_{\alpha+1}$  terminamos. Veamos que sucede si  $v_1 = v_\alpha$ . Consideremos los vectores  $v_3, v_4$ , donde  $v_4 \neq v_0$  ya que  $d \geq 5$ . Nuevamente, si algún vector  $v_3, v_4$  es igual a  $-v_1$  concluimos. En otro caso, notemos que  $v_3$  no puede estar en el cono generado por  $-v_1, v_0$  ya que tendríamos  $v_0 \in (v_3, -v_2)$  y  $v_1 \in (-v_2, -v_3)$ , lo cual contradice el lema anterior. Entonces el vector  $v_3 \in (v_2, -v_1)$ . Para el vector  $v_4$  el argumento anterior implica que  $v_4 = -v_1$ . Ahora bien, supongamos que  $v_\alpha \neq v_1$ . Sea  $k > 0$  el entero máximo tal que  $v_k \in (v_0, -v_{\alpha+1})$ . Debemos tener que  $v_\alpha = v_{k+1}$  ya que en caso contrario tendríamos  $v_\alpha \in (v_{k+1}, -v_k)$  y  $v_{\alpha+1} \in (-v_k, -v_{k+1})$ . Tomemos el vector  $v_{\alpha+2}$ . No puede ocurrir que  $v_{\alpha+2} \in (-v_\alpha, v_0)$  ya que eso implicaría que  $v_k \in (v_{\alpha+2}, -v_{\alpha+1})$  y  $v_k \in (-v_{\alpha+1}, -v_{\alpha+2})$ . Así, sea  $r > \alpha+1$  el entero mayor tal que  $v_r \in (v_{\alpha+1}, -v_\alpha)$ . Si  $v_{r+1} \in (-v_{k+1}, v_0)$ , entonces  $v_r \in (v_{k+2}, -v_{k+1})$  y  $v_{r+1} \in (-v_{k+1}, -v_{k+2})$ . Por lo tanto  $v_{r+1} = -v_{k+1}$ .

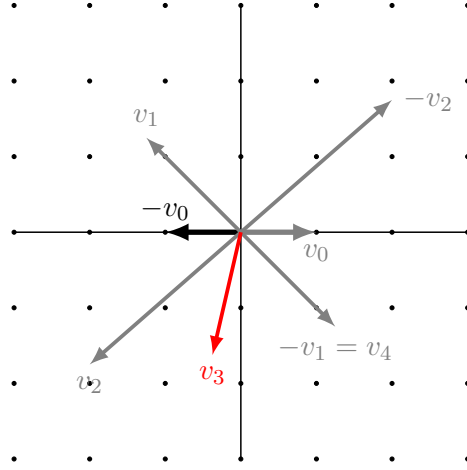


Figure 12: Configuración posible en el caso  $\alpha = 1$ .

(b) La clave es definir  $c_j = -b_j + \beta_j$ , donde

$$v_j = -b_j v_0 + \beta_j v_1, \quad b_j, \beta_j \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

Notemos que  $c_i = 1$ . Si  $c_2 = 2$  se sigue que  $v_2 = -v_0 + v_1$  y concluye la prueba. Supongamos que  $c_2 \geq 0$ . Sea  $v_3 = -b_3 v_0 + \beta_3 v_1$ . Tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_2 v_2 &= v_1 + v_3 \\ v_2 &= -b_2 v_0 + \beta_2 v_1 \\ v_3 &= -b_3 v_0 + \beta_3 v_1. \end{aligned}$$

Haciendo las operaciones pertinentes obtenemos que

$$a_2(b_2 + \beta_2) = 1 + b_3 + \beta_3.$$

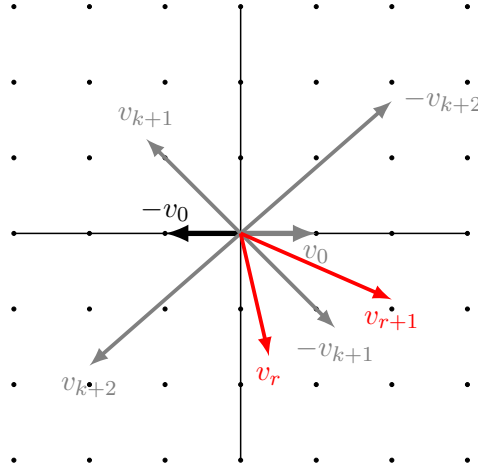


Figure 13: Configuración no posible.

Entonces, si  $c_3 \leq c_2$  debe ocurrir que  $a_2 = 1$  y en tal caso termina la prueba. Por otro lado tenemos  $c_2 < c_3$ . Para  $j = i - 1$  tenemos  $c_j > c_{j+1} = 1$ . Si  $c_j < c_j - 1$  tomamos  $q = j - 1$ , luego  $c_q > c_{q+1}$ . Continuando con este proceso obtendríamos que  $c_3 < c_2$ , lo cual ya descartamos, por lo que existe  $0 < j < i$  tal que  $c_j > c_{j+1}$  y  $c_j \geq c_{j-1}$ . Vamos a demostrar que  $a_j = 1$ . Consideremos las ecuaciones

$$\begin{aligned} a_j v_j &= v_{j-1} + v_{j+1}, & v_j &= -b_j v_0 + \beta_j v_1, \\ v_{j+1} &= -b_{j+1} v_0 + \beta_{j+1} v_1, & v_{j-1} &= -b_{j-1} v_0 + \beta_{j-1} v_1. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} a_j v_j &= -(b_{j-1} + b_{j+1})v_0 + (\beta_{j-1} + \beta_{j+1})v_1 \\ &= -a_j b_j v_0 + a_j \beta_j v_1. \end{aligned}$$

Ya que  $\{v_0, v_1\}$  es base de  $\mathbb{Z}^2$  se sigue que  $a_j b_j = b_{j-1} + b_{j+1}$  y  $a_j \beta_j = \beta_{j-1} + \beta_{j+1}$ . Sumando las ecuaciones anteriores obtenemos  $a_j c_j = c_{j-1} + c_{j+1}$ , esto prueba que  $a_j = 1$ .  $\square$

**Observación 3.7.** Dada una superficie tórica suave y compacta  $X_\Delta$  a cada cono  $\sigma \in \Delta$  le corresponde el plano complejo  $\mathbb{C}^2$ , por lo cual bajo la acción del toro  $(\mathbb{C}^*)^2$  el único punto fijo es el origen no obstante, cuando consideremos todas las identificaciones posibles para obtener  $X_\Delta$  cada uno de estos puntos no se identifican entre si por lo que son puntos distintos en  $X_\Delta$  y para cada cono  $\sigma \in \Delta$  tenemos un único punto fijo que denotaremos por  $x_\sigma$ .

**Teorema 3.8.** [Segundo teorema de clasificación] Toda superficie tórica suave y compacta se obtiene, o bien de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  o de  $\mathcal{H}_a$  por una sucesión finita de blowing ups en los puntos fijos de la acción del toro  $(\mathbb{C}^*)^2$

*Proof.* Sea  $\Delta = (v_0, v_1, \dots, v_d = v_0)$  un abanico correspondiente a una variedad tórica suave y compacta  $X_\Delta$ . Supongamos sin pérdida de generalidad que  $d \geq 5$  además, pongamos  $v_i = -v_0$ , para algún  $i$ . Debido al lema anterior existe un índice  $j$  con  $0 < j < i$  tal que  $v_j = v_{j-1} + v_{j+1}$ . Notemos que el determinante del conjunto  $\{v_{j-1}, v_{j+1}\}$  respecto a la base  $\{v_{j-1}, v_j\}$  es uno, por lo cual dicho conjunto es una base de la retícula  $\mathbb{Z}^2$ . Ahora, podemos remover  $v_j$  de la sucesión  $(v_0, v_1, \dots, v_d = v_0)$  y obtener una superficie tórica suave y compacta  $X_{\Delta_1}$  con

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (v_0^1, v_1^1, \dots, v_{d-2}^1, v_{d-1}^1 = v_0^1) \\ v_q^1 &= v_q, \quad \text{si } q < j \\ &= v_{q+1}, \quad \text{si } q \geq j \end{aligned}$$

En el abanico  $\Delta_1$  tenemos  $v_{i-1}^1 = v_i$ . Si  $i - 1 = 2$  obtenemos la configuración que se muestra en la figura 14. En otro caso, tenemos que existe  $0 < k < i - 1$  tal que  $v_k^1 = v_{k-1}^1 + v_{k+1}^1$ . Como en el caso anterior podemos remover  $v_k^1$  para obtener una superficie tórica suave y compacta  $X_{\Delta_2}$  donde

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (v_0^2, v_1^2, \dots, v_{d-3}^2, v_{d-2}^2 = v_0^2) \\ v_q^2 &= v_q^1, \quad q < k \\ &= v_{q+1}^1, \quad q \geq k. \end{aligned}$$

Continuando con el proceso anterior, obtendremos un entero positivo  $r$  tal que  $v_2^r = -v_0$ . Haciendo el mismo procedimiento para los vectores en el semiplano inferior obtenemos una superficie tórica suave y compacta asociada al abanico  $\Delta_* = (v_0, u_1, -v_0, u_2)$ , donde  $u_1, u_2 \in \Delta$ .

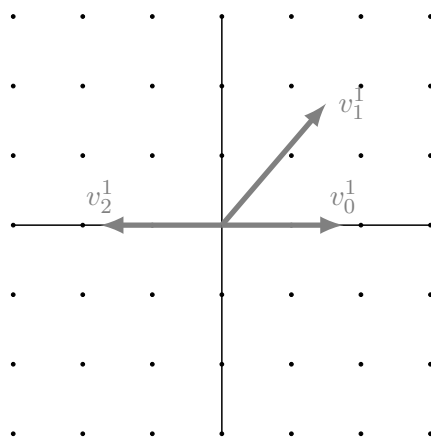


Figure 14: Caso  $i - 1 = 2$ .

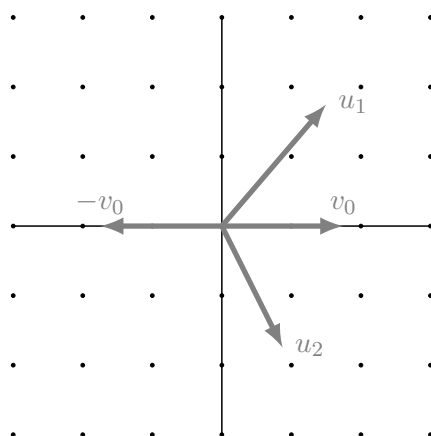


Figure 15: Configuración después de un número finito de pasos.

Finalmente, si algún vector del abanico  $\Delta_*$  es suma de sus vectores adyacentes tenemos que  $X_\delta$  es isomorfa al blowing up en el punto fijo bajo la acción de  $\mathbb{C}^{*2}$  en el plano proyectivo  $(\mathbb{C}\mathbb{P})^2$ . En otro caso, tenemos que  $X_\Delta$  es isomorfa a una superficie de Hirzebruch de algún parámetro.  $\square$

Ya sabemos que una sucesión de vectores  $v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0$  correspondientes a una superficie tórica suave y compacta tiene asociada una sucesión de enteros  $a_1, a_2, \dots, a_d$  tales que se cumplen las ecuaciones

$$(8) \quad a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

La demostración del teorema anterior nos proporcionará ciertas condiciones que debe cumplir esta sucesión de enteros de manera que podamos

ir en el sentido inverso es decir, cuando a partir de una sucesión de enteros  $a_1, a_2, \dots, a_d$  obtenemos una superficie tórica suave y compacta.

**Lema 3.9.** *Sea  $v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0$  una sucesión de vectores correspondientes a una superficie tórica suave y compacta. Sea  $a_1, a_2, \dots, a_d$  la correspondiente sucesión de enteros que satisface (8). Si en la sucesión*

$$v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0$$

*aadimos el vector  $v = v_j + v_{j+1}$  entre  $v_j$  y  $v_{j+1}$ , entonces la sucesión de enteros correspondiente a esta nueva sucesión de vectores bajo las relaciones en (8) es de la forma*

$$a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, 1, a_{j+1}, \dots, a_d.$$

*Proof.* Ya que  $\{v_j, v_{j+1}\}$  es una base de la retícula  $\mathbb{Z}^2$ , se puede ver que los conjuntos  $\{v_j, v_j + v_{j+1}\}$  y  $\{v_j + v_{j+1}, v_{j+1}\}$  también son base para la retícula. Tomemos la sucesión

$$w_i = \begin{cases} v_i, & i \leq j \\ v_j + v_{j+1}, & i = j + 1 \\ v_{i-1}, & i > j + 1 \end{cases}$$

Consideremos la sucesión de enteros  $b_i w_i = w_{i-1} + w_{i+1}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, d + 1$ . Luego

$$\begin{aligned} b_j w_j &= w_{j-1} + w_{j+1} \\ &= v_{j-1} + (v_j + v_{j+1}). \end{aligned}$$

por lo que  $(b_j - 1)v_j = v_{j-1} + v_{j+1}$  y en consecuencia  $b_j = a_j + 1$ . De forma similar se prueba que  $b_{j+2} = a_{j+1} + 1$ . Por construcción  $b_{j+1} = 1$ , esto concluye la prueba del lema.  $\square$

**Teorema 3.10.** *Existe una correspondencia entre superficies tóricas suaves y compactas y sucesiones de enteros  $a_1, a_2, \dots, a_d$  que satisfacen*

$$(a) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_d = 3d - 12,$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Proof.* Sea  $X_\Delta$  una superficie tórica suave y compacta con

$$\Delta = (v_0, v_1, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0).$$



Sea  $a_1, a_2, \dots, a_d$  como en (8). Notemos que (b) se cumple de manera directa para esta sucesión de enteros en efecto, tomemos  $B_{i,i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$ . La matriz de cambio de base de  $B_{i,i+1}$  a  $B_{i-1,i}$  está dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix}.$$

Por lo cual la matriz que cambia coordenadas de  $B_{i-1,i}$  a  $B_{i,i+1}$  viene dada por

$$\begin{pmatrix} a_i & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La condición (b) es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_d & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{d-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando en cuenta los cambios de base sucesivos

$$B_{0,1} \longrightarrow B_{1,2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_{d,d+1} = B_{0,1}.$$

se verifica (b).

Ahora comprobemos que la sucesión  $a_1, a_2, \dots, a_d$  satisface (a). Para el caso  $d = 3$  tenemos el plano proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  al cual le podemos asociar la sucesión de vectores  $e_1, e_2, -e_1 - e_1$ . Entonces tenemos

$$a_1 = a_2 = a_3 = -1.$$

Para  $d = 4$  obtenemos una superficie de Hirzebruch con parámetro  $a$ ,  $\mathcal{H}_a$ . Si tomamos la enumeración de vectores correspondientes al abanico de  $\mathcal{H}_a$  como se muestra en la figura 16, entonces  $a_2 = a_4 = 0, a_3 = a$  y  $a_1 = -a$  y se cumple (a).

Para el resto de la prueba utilizaremos inducción sobre  $d$ . Supongamos que el resultado es válido para  $d \geq 4$ . Por el teorema anterior toda superficie tórica suave y compacta se obtiene o bien de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$  o de  $\mathcal{H}_a$  por medio de una suma finita de vectores adyacentes. Así, podemos suponer sin pérdida de generalidad que una superficie tórica  $X_{\Delta_{d+1}}$ , con  $\Delta_{d+1} = (w_0, \dots, w_d, w_{d+1} = w_0)$ , se obtiene de una superficie tórica  $X_{\Delta_d}$ , donde  $\Delta_d = (v_0, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0)$ , por adición de un vector  $y = v_j + v_{j+1}$  entre  $v_j$  y  $v_{j+1}$  para algún índice  $j$ . Si  $a_1, \dots, a_d$  es la sucesión de enteros asociada a los vectores de  $\Delta_d$  como en (8), el lema

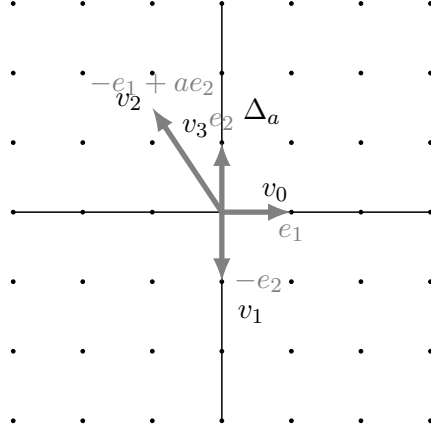


Figure 16:

anterior implica que la sucesión de enteros asociada a los vectores de  $\Delta_{d+1}$  es de la forma

$$a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + 1, 1, a_{j+1} + 1, \dots, a_d.$$

Por hipótesis de inducción se sigue que

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_{j-1} + a_j + 1 + 1 + a_{j+1} + 1 + \dots + a_d &= 3d - 12 + 3 \\ &= 3(d + 1) - 12. \end{aligned}$$

Recíprocamente, sean  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$  tales que satisfacen (1) y (2). Seleccionemos vectores  $v_0, v_1$  con  $\det(v_0, v_1) = 1$ . Definimos

$$v_{i+1} = a_i v_i - v_{i-1}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Un argumento inductivo muestra que  $B_{i,i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$  satisface la igualdad  $\det(v_i, v_{i+1}) = 1$ . Probemos que  $v_d = v_0$ . Notemos que la matriz

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}$$

cambia coordenadas  $B_{d-1,d}$  a coordenadas  $B_{0,1}$ . Por hipótesis tenemos

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_d & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo cual se sigue que  $v_d = v_0$ . Así, obtenemos el abanico

$$\Delta = (v_0, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0).$$

que corresponde a una superficie tórica suave y compacta. Finalmente, sea  $\alpha \in \mathbb{Z}$  tal que  $\alpha v_0 = \alpha v_d = v_{d-1} + v_1$ . Por el teorema anterior tenemos

$$a_1 + \dots + a_{d-1} + \alpha = 3d - 12.$$

De la igualdad anterior y de (1) se concluye que  $\alpha = a_d$ . □

**Ejemplo 3.11.** Consideremos la sucesión 0, 2, 1, 3, 1, 3, 1, 1. Haremos el mismo procedimiento que en la prueba del teorema 10. Sin pérdida de generalidad pongamos  $v_0 = e_1, v_1 = e_2$ . Entonces

$$\begin{aligned} v_{1+1} &= -e_1, & v_{5+1} &= -e_2, \\ v_{2+1} &= -2e_1 - e_2, & v_{6+1} &= e_1 - e_2, \\ v_{3+1} &= -e_1 - e_2, & v_{7+1} &= e_1, \\ v_{4+1} &= -e_1 - 2e_2. \end{aligned}$$

Así, sea  $\Delta = (v_0, v_1, \dots, v_7, v_8)$ . Veamos cuál es la superficie subyacente de  $X_\Delta$ . Consideremos el vector  $v_4$ . Notemos que  $\det(v_2, v_4) = 1$  y  $\det(v_4, v_8) = 1$  de forma que podemos remover los vectores  $v_3, v_5, v_6$  y  $v_7$  obteniendo el abanico  $\Delta_1$  correspondiente a una superficie de Hirzebruch  $\mathcal{H}_a$ .

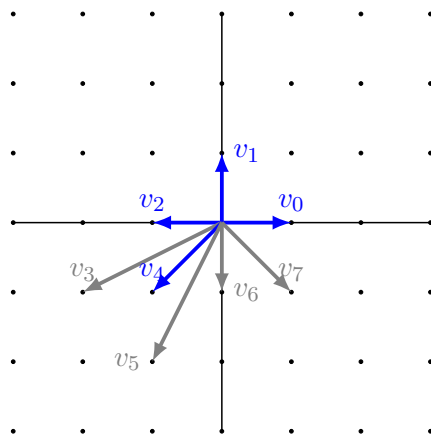


Figure 17:  $\Delta$ .

## 4 Producto de intersección

Una herramienta importante en el estudio del comportamiento geométrico de superficies suaves proyectivas es la intersección de dos curvas irreducibles  $C_1, C_2$  sobre dicha superficie, de manera más general, la intersección de dos divisores  $D_1, D_2$ . Para definir el producto de intersección de dos curvas irreducibles se utilizan los números de intersección, los cuales denotaremos por  $I(x, C_1 \cap C_2)$ , donde  $C_1, C_2$  son las curvas en cuestión y  $x$  es un punto que pertenece a ambas. El lector podrá encontrar con detalle la construcción del número de intersección en [4]. El producto de intersección de dos curvas irreducibles  $C_1, C_2$  esta dado por:

$$(9) \quad C_1 \cdot C_2 = \sum_{x \in C_1 \cap C_2} I(x, C_1 \cap C_2) \in \mathbb{Z}.$$

Los divisores en una superficie suave proyectiva  $X$  son sumas formales de curvas irreducibles módulo equivalencia lineal, el grupo conformado por estos elementos es el grupo de Picard de  $X$  denotado por  $PicX$ . Construir una forma simétrica bilineal  $\cdot : PicX \times PicX \rightarrow \mathbb{Z}$  que concuerde con (9) no es algo trivial, en este trabajo utilizaremos la definición que se emplea en [3] donde el lector podrá consultar los detalles.

**Definición 4.1.** Sea  $X$  una superficie suave y proyectiva. Definimos el producto de intersección de  $D, D' \in PicX$  por

$$(10) \quad D \cdot D' = deg(i^* \mathcal{O}_X(D)),$$

donde  $\mathcal{O}_X(D)$  es el haz de línea correspondiente al divisor  $D$  e  $i : D' \rightarrow X$  es el mapeo inclusión.

Cuando  $D = D'$  escribimos  $D^2 = D \cdot D'$ , al entero  $D^2$  lo llamamos número de auto-intersección de  $D$ . Notemos que esta situación es radicalmente opuesta a (9). En este caso particular, si  $D$  es una curva suave en una superficie  $X$  obtenemos

$$D^2 = deg(\mathcal{N}_{D/X}),$$

donde  $\mathcal{N}_{D/X}$  representa la gavilla normal de  $D$  en  $X$ , ver [7].

Con base a la observación 2.3.4, los vectores que conforman el abanico de superficie tórica suave  $X_\Delta$  le corresponden curvas suaves en  $X_\Delta$  isomorfas a  $\mathbb{CP}^1$ . Vamos a estudiar la geometría de las superficies tóricas calculando los números de intersección de dichas curvas.

**Ejemplo 4.2.** Consideremos la superficie de Hirzebruch  $\mathcal{H}_a$  que se muestra en el ejemplo 2.2.5. Sean  $v_0, v_1, v_2, v_3$  son los vectores que componen a  $\Delta_a$  ordenados de forma antihoraria con  $v_0 = e_1$ . Denotamos por  $D_0, D_1, D_2, D_3$  las curvas correspondientes a estos vectores en  $\mathcal{H}_a$  (ver observación 2.3.4). Primero veremos cual es su auto-intersección. Para  $D_0$  tenemos que

$$D_0 = \{(0, y), (0, y^{-1}), p_1, p_2\} \cong \mathbb{CP}^1.$$

donde  $p_1, p_2$  son los puntos al infinito. Dado que  $X_{\sigma_1} = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ ,  $X_{\sigma_2} = \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y^{-1}])$  la gavilla ideal de  $D_0$  en  $\mathcal{H}_a$  es generada en los abiertos  $X_{\sigma_1}$  y  $X_{\sigma_2}$  por el ideal  $(x)$ . Así, el haz de línea correspondiente a la gavilla conormal  $\mathcal{F}_{D_0}/\mathcal{F}_{D_0}^2$  es el haz trivial. Así,  $D_0^2 = 0$ . Por otro lado, consideremos el divisor

$$D_1 = \{(x, 0), (x^{-1}, 0), p_1, p_2\}$$

Como  $X_{\sigma_4} = \text{Spec}(\mathbb{C}[x^{-1}, x^a y])$ , la gavilla de ideales  $\mathcal{F}_{D_1}/\mathcal{F}_{D_1}^2$  es generada por  $(y), (x^a y)$  en  $X_{\sigma_1}, X_{\sigma_4}$ , respectivamente. Luego, podemos identificar la gavilla conormal de  $D_1$  con la gavilla de secciones del haz  $\mathcal{O}(a)$  sobre  $D_1 \cong \mathbb{CP}^1$ . Por ejemplo, una manera de ver esto es por medio de la asignación

$$f \mapsto \{([x : 1], y), ([1, x^{-1}], x^a y)\},$$

donde  $f \in \mathcal{F}_{D_1}/\mathcal{F}_{D_1}^2(X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_4})$ . Entonces el haz normal de  $D_1$  en  $\mathcal{H}_a$  corresponde al haz  $\mathcal{O}(-a)$ , por lo cual  $D_1^2 = -a$ . Para el cálculo de las curvas  $D_2, D_3$  el procedimiento se realiza de manera similar. Estas curvas están dadas por

$$\begin{aligned} D_2 &= \{(0, x^{-a} y^{-1}), (0, x^a y), p_1, p_2\}, \\ D_3 &= \{(x, 0), (x^{-1}, 0), p_1, p_2\}, \end{aligned}$$

por lo que obtenemos  $D_2^2 = 0$  y  $D_3^2 = a$ .

Calculamos ahora  $D_0 \cdot D_1$  y  $D_1 \cdot D_2$ . Notemos que

$$\begin{aligned} D_0 \cap X_{\sigma_1} &= V(x), \\ D_0 \cap X_{\sigma_2} &= V(x), \\ D_0 \cap X_{\sigma_3} &= V(1), \\ D_0 \cap X_{\sigma_4} &= V(1), \end{aligned}$$

por lo cual las funciones de transición del haz  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_a}(D_0)$  en  $X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_4}$  están dadas por  $x$ . Al tomar el pullback  $i^*(\mathcal{O}_{\mathcal{H}_a}(D_0))$  se sigue que este haz de línea sobre  $D_1$  corresponde al haz  $\mathcal{O}(1)$ . Por lo tanto  $D_0 \cdot D_1 = 1$ . Para  $D_2$  tenemos

$$\begin{aligned} D_2 \cap X_{\sigma_1} &= V(1), \\ D_2 \cap X_{\sigma_4} &= V(x^{-1}), \end{aligned}$$

donde se sigue que el haz  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_a}(D_2)$  tiene función de transición  $x^{-1}$  sobre  $X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_4}$ . De forma análoga al producto  $D_0 \cdot D_1$  tenemos  $D_1 \cdot D_2 = 1$ . En cambio,

$$\begin{aligned} D_3 \cap X_{\sigma_1} &= V(1), \\ D_3 \cap X_{\sigma_4} &= V(1), \end{aligned}$$

de manera que el haz  $\mathcal{O}_{\mathcal{H}_a}(D_3)$  es trivial en  $X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_4}$ , así,  $D_1 \cdot D_3 = 0$ . Nuevamente, haciendo un procedimiento similar obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} D_0 \cdot D_2 &= 0, \\ D_0 \cdot D_3 &= 1, \\ D_2 \cdot D_3 &= 1. \end{aligned}$$

La figura 18 muestra un bosquejo de la intersección de estas curvas

Observemos que la intersección de curvas correspondientes a vectores que conforman un cono es transversal.

**Ejemplo 4.3.** Ahora consideremos el plano proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ . Nuevamente, enumeramos los vectores que conforman su abanico correspondiente (ver ejemplo 2.2.3) de manera antihoraria iniciando en  $v_0 = e_1$ . Ya que  $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(x,y)}^2$  y  $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(x^{-1},x^{-1}y)}^2$  tenemos

$$D_1 = \{(x, 0), (x^{-1}), p_1, p_2\},$$

entonces  $D_1 \cap X_{\sigma_1} = V(y)$  y  $D_1 \cap X_{\sigma_2} = V(x^{-1}y)$ . Luego la gavilla conormal  $\mathcal{F}_{D_1}/\mathcal{F}_{D_1}^2$  se identifica con la gavilla de secciones del haz  $\mathcal{O}(-1)$  sobre  $D_1 \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ , entonces  $D_1^2 = 1$ . Similarmente se sigue que  $D_2^2 = 1, D_0^2 = 1$ . Así, obtenemos el diagrama que se muestra en la figura 19.

Ahora hacemos un blowing up en el punto  $x_{\sigma_1}$ . Nuevamente tomamos enumeración antihoraria para los vectores del correspondiente abanico iniciando en  $e_1$ .

Del ejemplo 2.2.4 tenemos  $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{y,xy^{-1}}^2, X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{x,x^{-1}y}^2$ . Luego

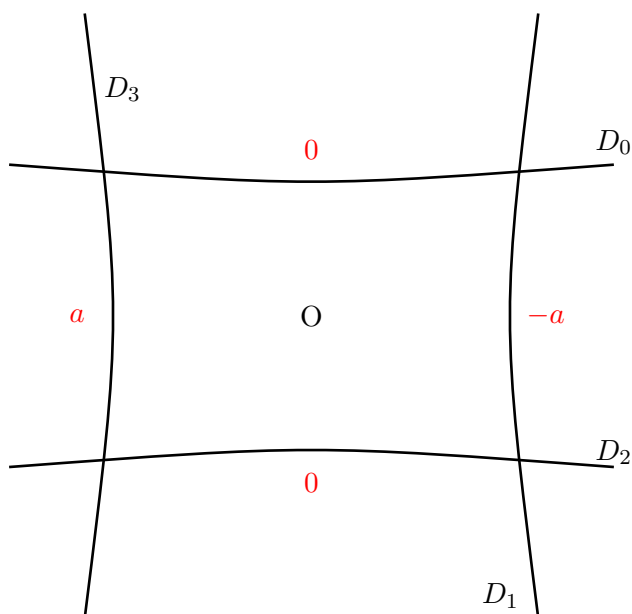


Figure 18: Los números en rojo muestran la auto-intersección de las curvas.

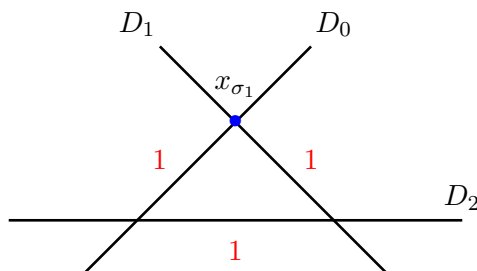


Figure 19: Configuración en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .

$$D_1 = \{(0, xy^{-1}), (0, x^{-1}y)\}, p_1, p_2\},$$

por lo cual la gavilla ideal de  $D_1$  es generada por  $(y), (x)$  en  $X_{\sigma_1}, X_{\sigma_2}$ , respectivamente. Representado a la línea proyectiva  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  sin los puntos al infinito en coordenadas  $x/y$  tenemos

$$\mathcal{F}_{D_1}/\mathcal{F}_{D_1}^2 \cong \mathcal{O}(1),$$

donde el lado derecho representa la gavilla de secciones. Así,  $D_1^2 = -1$ . Con un procedimiento análogo tenemos  $D_3^2 = 1$ . Por otra parte, dado que ahora tenemos el diagrama

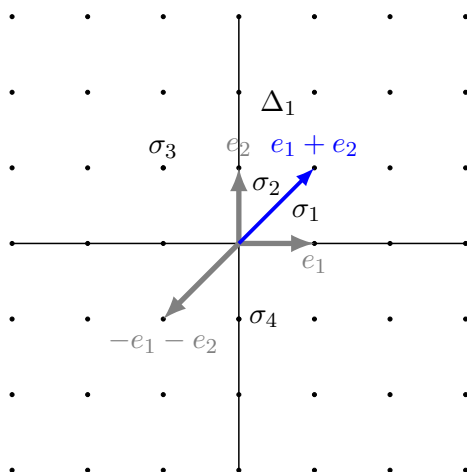


Figure 20: Abanico correspondiente al bluing up en  $x_{\sigma_1}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^2_{(y,xy^{-1})} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2_{(x,x^{-1}y)} \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C}^2_{(x^{-1},x^{-1}y)} & \longleftarrow & \mathbb{C}^2_{(xy^{-1},y^{-1})}
 \end{array}$$

podemos observar que la gavilla de ideales asociada a la curva  $D_0$  es generada por  $(xy^{-1})$ , tanto en  $X_{\sigma_1}$  como en  $X_{\sigma_4}$  de aquí podemos concluir que  $D_0^2 = 0$  además, tenemos

$$\begin{aligned}
 D_2 \cap X_{\sigma_2} &= V(1), \\
 D_2 \cap X_{\sigma_4} &= V(1),
 \end{aligned}$$

luego  $D_2 \cdot D_0 = 0$ . De esta manera obtenemos la configuración que se muestra en la figura 21.

Notemos que en los ejemplos anteriores se satisface

$$(11) \quad a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1} \implies D_i^2 = -a_i.$$

**Teorema 4.4.** *Sea  $\Delta$  un abanico correspondiente a una superficie tórica suave compacta  $X_\Delta$ . Dados los conos  $\sigma = (v_{i-1}, v_i), \mu = (v_i, v_{i+1}) \in \Delta$  con  $a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1}$ , entonces  $D_i^2 = -a_i$ .*



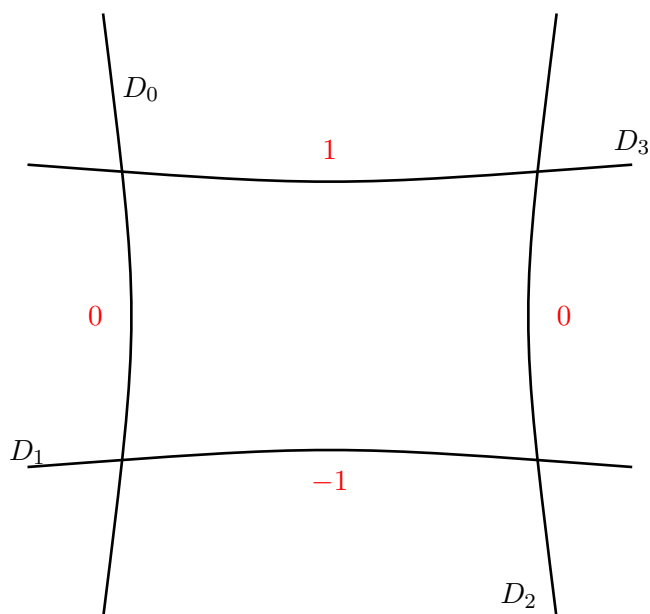


Figure 21:

*Proof.* Ya que  $X_\Delta$  es suave el conjunto  $\{v_{i-1}, v_i\}$  es una base de  $\mathbb{Z}^2$ . Al considerar esta base, podemos tomar  $\check{\sigma} = (v_{i-1}, v_i)$  luego la igualdad  $a_i v_i = v_{i-1} + v_{i+1}$  implica que  $\check{\mu} = (-v_{i-1}, a_i v_{i-1} + v_i)$ . Así, después de realizar las identificaciones pertinentes tenemos

$$\begin{aligned} X_\sigma &= \mathbb{C}_{(x,y)}^2, \\ X_\mu &= \mathbb{C}_{(x^{-1}, x^a y)}^2, \end{aligned}$$

por lo cual nos hemos reducido al caso de la superficie de Hirzebruch (ejemplo 4.2). Por lo tanto  $D_i^2 = -a_i$ . □

**Ejemplo 4.5.** Tomemos la superficie del ejemplo anterior que resulta de realizar un blowing up en el punto fijo  $x_{\sigma_1}$ . Ahora hagamos un blowing up en el punto fijo  $x_{\sigma_2}$  de manera que obtenemos el abanico  $\Delta_2$  que se muestra en la figura 22. Ahora la enumeración de enteros correspondiente a  $X_{\Delta_2}$  es



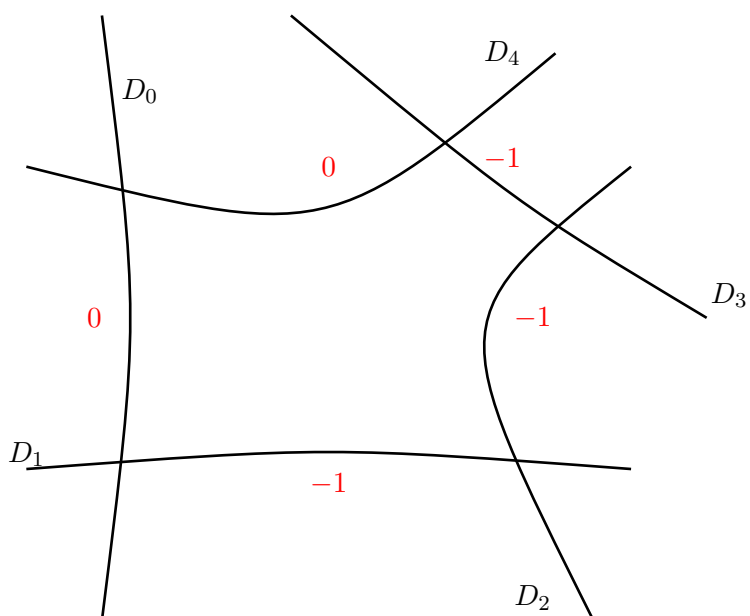


Figure 23:

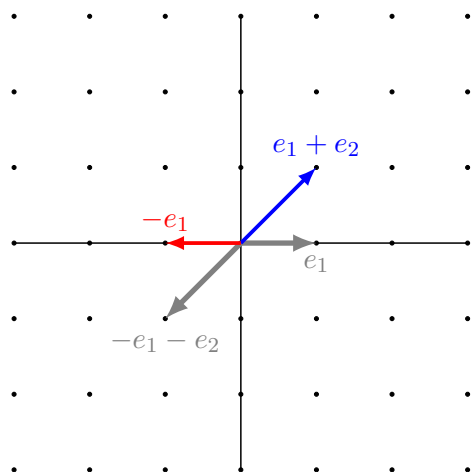
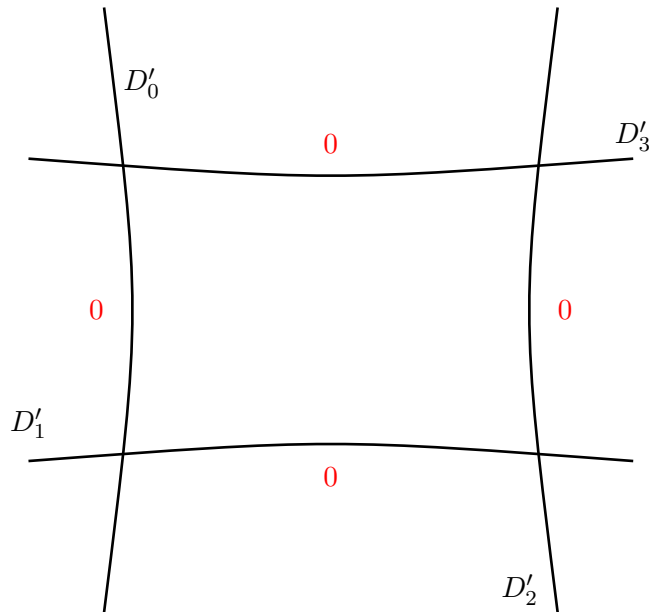


Figure 24: Abanico que obtenemos al remover  $e_2$  de  $\Delta_2$ .

Saúl Israel Valdez López  
 Departamento de matemáticas,  
 CINVESTAV-IPN,  
 Av. Instituto Politécnico Nacional  
 2508,  
 Ciudad de México,  
 valdezlopezsaul84@gmail.com

Figure 25: Configuración que obtenemos al contraer  $D_2$ .

## Referencias

- [1] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, London Mathematical Society Student Texts. 34, Cambridge University Press, 1996.
- [2] A. Corato, *Classification of Complex Algebraic Surfaces*, ALGANT Master Thesis in Mathematics, Universit Degli Studi di Padova, Université de Bordeaux, 2018.
- [3] D. Cox, J. Little, H. Schenck, *Toric Varieties*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2009.
- [4] W. Fulton, *Algebraic curves, An Introduction to Algebraic Geometry*, University of Chicago.
- [5] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1993.
- [6] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Harvard University, 1978.
- [7] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [8] N.J. Hitchin, *Integrable Systems*, Calerendon Press Oxford, 1999.
- [9] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1972.
- [10] K. Yang, *Complex Algebraic Geometry*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 1991.