Morfismos, Vol. 27, No. 1, 2023, pp. 31–68

Comportamientos extraños del infinito: gráficas infinitas

David J. Fernández-Bretón [1] Jesús A. Flores Hinostrosa [2]
V. Adrián Meza-Campa [3] L. Gerardo Núñez Olmedo [4]

Resumen

La combinatoria infinita (temática que, a raíz del trabajo de Cantor, actualmente es posible estudiar de manera completamente formal) nos presenta un interesante contraste de semejanzas y diferencias con su análogo finito. El propósito de este artículo es presentar algunos ejemplos concretos tanto de semejanzas, como de diferencias radicales, para proporcionar cierta intuición acerca del comportamiento del infinito en el ámbito combinatorio. Nuestros ejemplos son tomados de la rama de las matemáticas conocida como Teoría de Gráficas.

2010 Mathematics Subject Classification: 05C63, 03E05.
Keywords and phrases: Teoría de Gráficas, Teoría de Conjuntos, Combinatoria Infinita.

1 Introducción

La *combinatoria infinita* consiste en el estudio formal de diversas estructuras infinitas, de manera análoga a como se hace comúnmente, en la combinatoria usual, con estructuras finitas. Por ejemplo, uno de los resultados básicos más clásicos en combinatoria finita sería el estudio de

[1]Trabajo realizado con apoyo parcial del proyecto SIP-20221862 del IPN.
[2]Trabajo realizado bajo una beca BEIFI como parte del proyecto SIP-20221862 del IPN.
[3]Trabajo realizado como becario del programa Delfín de Investigación de Verano de 2022.

los coeficientes binomiales, definidos como

$$\binom{n}{k} = \text{número de subconjuntos de } k \text{ elementos}$$
$$\text{de un conjunto con } n \text{ elementos,}$$

el cual, como todos aprendemos en nuestros cursos más básicos, resulta ser igual a $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Contar, por otro lado, la cantidad total de subconjuntos de un conjunto con n elementos, implica realizar la cuenta anterior dejando que k varíe desde 0 (el subconjunto más pequeño posible es el vacío, con 0 elementos) hasta n (el subconjunto más grande posible sería el total); obtenemos las relaciones

$$\wp(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

en donde utilizamos el símbolo $\wp(n)$ justamente para denotar el número total de subconjuntos de un conjunto con n elementos. Gracias al trabajo de Cantor, hoy en día podemos trabajar *en el paraíso*[4] y ponderar preguntas análogas respecto de las cantidades infinitas, con la posibilidad de explorar las respuestas a dichas preguntas de manera totalmente formal. Es interesante observar que esta área de estudio presenta un contraste entre similitudes y diferencias radicales con la combinatoria finita (tanto en el sentido de que ciertos enunciados se vuelven totalmente falsos al pasar de lo finito a lo infinito, como en el sentido de que algunos otros enunciados permanecen verdaderos, aunque la demostración correspondiente resulta tener muy poco en común con el caso finito). Por ejemplo, si κ es un cardinal infinito, y $\lambda \leq \kappa$ es cualquier otro cardinal (finito o infinito), entonces se suele denotar por $[\kappa]^\lambda$ a la cardinalidad del conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de cardinalidad λ de un conjunto dado de tamaño κ (en otras palabras, este objeto es el análogo infinito del coeficiente binomial). En ciertos casos, resulta bastante complicado determinar con exactitud el valor de $[\kappa]^\lambda$: si bien es cierto que $[\kappa]^0 = 1$, y $[\kappa]^\lambda = \kappa$ siempre que $\lambda \neq 0$ sea finito, el valor de $[\kappa]^\lambda$ para $\lambda < \kappa$ infinito es, en cierto sentido, un completo interrogante, pues el valor exacto varía dependiendo del tipo de cardinal que sea κ,

[4]Aquí, desde luego, estamos haciendo referencia a la famosa frase emitida por D. Hilbert: *Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können*, que podría traducirse como *del paraíso que Cantor construyó para nosotros, nadie deberá expulsarnos.*

y en muchos casos este valor es incluso –demostrablemente– imposible de determinar utilizando únicamente los axiomas usuales de la teoría de conjuntos (para valores de $\lambda > \kappa$, sin embargo, es evidente que $[\kappa]^\lambda = 0$, y por otra parte también es cierto que $[\kappa]^\kappa = 2^\kappa$). Desde luego que esta situación contrasta significativamente con lo que sucede en el caso finito. Sin embargo, sigue siendo cierto que $\sum_{\lambda \leq \kappa} [\kappa]^\lambda = 2^\kappa$, aunque en este caso la demostración ya presenta discrepancias importantes con la correspondiente demostración del caso finito.

El propósito de este artículo divulgativo es presentar al lector con varios ejemplos, estéticamente muy satisfactorios, de estos contrastes entre la combinatoria finita y la infinita. Como terreno de juego para dicha actividad recreativa, hemos elegido el fértil campo de la Teoría de Gráficas, que constituye una de las áreas fundamentales de la combinatoria en el caso finito –y que también en su momento inspiró varias investigaciones fundamentales en el caso infinito–. Para esto, sería de gran ayuda que el lector se encuentre ya ligeramente familiarizado con las vicisitudes de la aritmética de cardinales infinitos, aunque en la sección 2 incluimos un breve sumario de las definiciones y resultados relevantes (dichos resultados sólo se mencionan, y no se demuestran, pero el lector con madurez matemática debería poder seguir el paso del resto del artículo si simplemente toma el contenido de esta sección como artículo de fe). En la sección 3 incluimos algunos resultados "básicos", en el sentido de que pueden enunciarse con sólo las definiciones básicas de teoría de gráficas, sin involucrar aún demasiada teoría. La sección 4 versa sobre los árboles y bosques (definidos exactamente igual a como se hace en el caso finito). La sección 5 introduce las coloraciones por vértices y el número cromático. En la sección 6 exploramos cuestiones que tienen que ver con emparejamientos de vértices, así como la relación de esto con algunos de los temas tratados anteriormente. Esta última sección ilustra con abundancia un fenómeno bastante interesante que sucede con frecuencia al movernos del terreno finito al infinito: numerosos teoremas "siguen siendo ciertos" en el contexto infinito, siempre y cuando se encuentre la manera correcta de enunciarlos en este contexto más general. Esta sección es también aquella en la que más se han realizado investigaciones de alto grado de dificultad, y se encuentran varios teoremas cuyas demostraciones constituyen la mayor parte de artículos completos de investigación; muchos de estos resultados únicamente se mencionan y se ponen en contexto, sin incluir sus demostraciones. Finalmente, se incluye al final del artículo un apéndice que contiene algunos contraejemplos en el contexto donde no se asume el llamado *Axioma de Elección*, mismo que juega un papel importante en varias de las demostraciones contenidas en las secciones previas; de esta forma, se explica con cierto detalle la manera como este axioma es esencial a las demostraciones mencionadas.

Intentamos presentar las demostraciones pertinentes con un nivel de detalle que permita a las ideas principales quedar expuestas, sin permitir que los excesivos detalles mecánicos afecten ni la legibilidad, ni la visibilidad del flujo principal de ideas. En particular, los lectores menos experimentados que quieran realmente comprender a profundidad lo aquí expuesto, deberán tratar cada afirmación no demostrada como si fuera un ejercicio. La frase "es fácil ver", así como cualquier otra frase a efecto similar, funcionan como señalamientos de la presencia de algún ejercicio de este tipo (ejercicios que, si bien no siempre son precisamente fáciles, sí son, en la mayoría de los casos, rutinarios, en el sentido de que constituyen alguna verificación mecánica de la veracidad de alguna proposición sencilla, sin necesidad de involucrar ideas novedosas de ningún tipo).

2 Aritmética cardinal infinita

La definición clave, descubierta por Cantor (justo esa idea genial gracias a la cual hoy en día podemos estudiar formalmente el infinito), es la siguiente: es posible comparar las cantidades de elementos de dos conjuntos sin necesidad de contar a los elementos de cada uno de estos conjuntos por separado; antes bien, basta emparejar a los elementos de un conjunto con los del otro, sin permitir que nadie se quede sin emparejar y que nadie tenga más de una pareja.

Definición 2.1. Dados dos conjuntos X, Y, decimos que

1. X es *equipotente a* Y, simbolizado $X \approx Y$ o $|X| = |Y|$, si existe una función biyectiva entre X y Y.

2. X *tiene a lo más tantos elementos como* Y, simbolizado $X \preceq Y$ o $|X| \leq |Y|$, si existe una función inyectiva $f : X \longrightarrow Y$.

Debería ser bastante claro para el lector que la relación de equipotencia $\approx$ se comporta como una relación de equivalencia (es reflexiva, simétrica y transitiva); el único detalle es que no está definida sobre un conjunto, sino sobre la clase (propia) de todos los conjuntos, pero en este artículo nos abstendremos de discutir esas sutilezas fundacionales de la teoría axiomática de conjuntos. Es por ello que nos abstenemos de asignarle una denotación concreta al símbolo $|X|$ (que, intuitivamente, debería ser "la cardinalidad de X", la clase de equivalencia de X módulo la relación de equipotencia), y jamás lo utilizaremos por sí solo; únicamente utilizaremos los símbolos $|X| = |Y|$ y/o $|X| \leq |Y|$ como abreviaciones de los enunciados correspondientes, tal y como vienen estipulados en la Definición 2.1.

Por otra parte, la relación $\preceq$ es antisimétrica y transitiva; es decir, se comporta como una relación de preorden –con lo cual, el comportamiento es como el de una relación de orden parcial en las clases de equivalencia módulo la relación que hace a X y Y equivalentes si y sólo si $X \preceq Y$ y $Y \preceq X$–. Para comprender esta relación de equivalencia, notemos que, dados dos conjuntos X, Y, se tiene que $X \preceq Y$ y $Y \preceq X$ si y sólo si $X \approx Y$; una de estas implicaciones es obvia, y la otra dista mucho de ser trivial, al grado de que es un teorema que tiene nombre: el teorema de Cantor–Bernstein.

La aritmética de números cardinales infinitos se define por analogía con el caso de los cardinales finitos. Dados dos cardinales κ y λ, definimos a $\kappa+\lambda$ como la cardinalidad de la unión disjunta entre un conjunto de cardinalidad κ, y otro de cardinalidad λ (como ya dijimos arriba, al escribir números cardinales como si fueran objetos, uno debe en realidad pensar en estos enunciados como abreviaturas: así, nuestra "definición" de suma en realidad debe concebirse como la estipulación de que, siempre que escribamos $|Z| = |X| + |Y|$, lo que en realidad estamos diciendo es que Z es equipotente a la unión disjunta de X y Y). Similarmente, definimos $\kappa\lambda$ como la cardinalidad del producto cruz $X \times Y$, con $|X| = \kappa$ y $|Y| = \lambda$; y finalmente definimos κ^λ como la cardinalidad del conjunto $X^Y = \{f | f : Y \longrightarrow X\}$, en donde $|X| = \kappa$ y $|Y| = \lambda$. El lector podrá sin duda verificar, sin demasiada dificultad, que las tres definiciones coinciden con las definiciones usuales de la aritmética elemental en el caso de los cardinales finitos. El teorema fundamental que caracteriza a la suma y el producto de cardinales, es el siguiente.

Teorema 2.2. *Sean κ, λ dos números cardinales, en donde al menos uno de los dos es infinito. Entonces, se cumple lo siguiente:*

1. $\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$,

2. *si κ, λ son ambos no cero, entonces* $\kappa\lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

Desde luego, si tanto κ como λ son finitos en el teorema anterior, entonces el resultado tanto de la suma como del producto es, como hemos remarcado anteriormente, ya conocido: coincide con la suma y el producto de números naturales. Similarmente, si alguno de los dos números, κ o λ, es igual a cero, entonces $\kappa\lambda = 0$ (independientemente de que el otro número cardinal sea finito o infinito).

También es posible realizar tanto sumatorias como productos de una familia de cardinales. Esto es, si $\{X_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$ es una familia indexada de conjuntos, con conjunto de índices Λ, entonces se define $\sum_{\alpha\in\Lambda}|X_\alpha|$ como la cardinalidad de la unión disjunta de los conjuntos X_α; formalmente,

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}|X_\alpha| = \left|\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(X_\alpha \times \{\alpha\})\right|.$$

Similarmente, $\prod_{\alpha\in\Lambda}|X_\alpha| = |\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha|$. Es posible demostrar que, siempre que los $|X_\alpha|$ sean todos ellos distintos de cero, se tiene que

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}|X_\alpha| = \sup(\{|X_\alpha||\alpha \in \Lambda\} \cup \{|\Lambda|\});$$

por otra parte, el llamado *lema de König* nos garantiza que, si $\{X_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$ y $\{Y_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$ son sendas familias indexadas de conjuntos, tales que $|X_\alpha| < |Y_\alpha|$ para todo $\alpha \in \Lambda$, entonces

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}|X_\alpha| < \prod_{\alpha\in\Lambda}|Y_\alpha|.$$

Se utilizarán también, en mucha menor medida, los números ordinales. Estos fueron originalmente descubiertos por Cantor, aunque la formalización más utilizada actualmente es la de von Neumann, en donde cada número ordinal se identifica con el conjunto de aquellos números ordinales menores a él (por ejemplo, $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$ y, en general, $n = \{0, \dots, n-1\}$; la formalización de von Neumann permite continuar este conteo hasta el ámbito transfinito). De esta forma, los elementos de un número ordinal se encuentran bien ordenados mediante la relación de orden parcial $\subseteq$, en donde la relación de pertenencia $\in$ constituye el orden estricto correspondiente. Cada conjunto bien ordenado es isomorfo a un único número ordinal; de esta forma, los números ordinales nos proporcionan una colección que contiene a un "representante canónico" de cada "clase de equivalencia" de conjuntos bien ordenados módulo la relación de isomorfismo. Por otra parte, la clase misma de los números ordinales está también bien ordenada, en el sentido de que cada conjunto no vacío de ordinales tiene un elemento $\subseteq$-mínimo; esto permite realizar demostraciones por inducción transfinita y definir objetos por recursión transfinita, es decir, si realizamos algún procedimiento en un número ordinal α, utilizando como suposición que el procedimiento ya ha sido realizado con todos los ordinales $\beta < \alpha$, entonces este procedimiento (ya sea una definición, o una demostración) está bien definido. Además, si suponemos el axioma de elección, entonces todo conjunto puede ser bien ordenado; luego, todo conjunto es equipotente a algún número ordinal, y por lo tanto existe un mínimo número ordinal equipotente a nuestro conjunto. Como consecuencia de esto, siempre que exista algún conjunto con cierta propiedad, es válido tomar un tal conjunto de cardinalidad mínima posible, lo cual se utilizará con bastante frecuencia en diversas definiciones a lo largo del presente artículo.

3 Resultados básicos

Sin suponer teoría previa alguna, comenzamos desde la definición misma de gráfica, que proporcionamos a continuación. El lector con algo de experiencia notará que, a lo largo de este artículo, nuestras gráficas son todas ellas simples y no-dirigidas.

Definición 3.1. Una *gráfica* es una pareja ordenada $G = (V, E)$, en donde V es cualquier conjunto no vacío, y[5] $E \subseteq [V]^2$. A los elementos de V se les llama *vértices*, y a los de E se les llama *aristas*.

Notoriamente, nuestra definición de gráfica (simple y no-dirigida) coincide con la que usualmente se utiliza en el caso finito, con la única excepción de que nos abstenemos de insistir en este último punto –es decir, simplemente no requerimos que el conjunto de vértices debe de ser finito–.

Un concepto estándar en teoría de gráficas es el del *grado* de un vértice. En el caso que nos ocupa (donde no hay bucles ni aristas múltiples), es fácil definir el grado de un vértice como la cantidad, ya sea de vértices adyacentes al dado, o bien de aristas incidentes al vértice en

[5]En teoría de conjuntos, es estándar utilizar la notación $[X]^\kappa$ para referirse al conjunto de subconjuntos de X que tienen cardinalidad κ. Así, la presente definición estipula que cada elemento de E es un conjunto que contiene a exactamente dos elementos de V. De esta forma, identificamos a una arista –que, en el presente artículo, nunca es un bucle– con el conjunto de sus dos extremos.

cuestión. En símbolos, si $G = (V, E)$ es una gráfica, y $v \in V$, entonces definimos

$$d_G(v) = |\{u \in V | \{u, v\} \in E\}| = |\{e \in E | v \in e\}|.$$

Uno de los resultados más elementales en teoría de gráficas finitas es el que afirma que, al sumar los grados de todos los vértices de una gráfica, uno obtiene el doble del número de aristas que contiene la gráfica. En el caso finito, no es difícil formalizar el argumento usual, el cual se basa en la observación de que, al sumar los grados de cada vértice, se está al mismo tiempo realizando un conteo de aristas, con la salvedad de que cada arista se cuenta dos veces (una por cada uno de sus extremos). En el caso infinito, sin embargo, es necesario prestar un poco más de atención al detalle, como a continuación veremos.

Teorema 3.2. *Si $G = (V, E)$ es cualquier gráfica, entonces*

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E|.$$

Demostración. Dadas las definiciones proporcionadas en la sección 2, lo que en realidad necesitamos demostrar es que, si X_v es un conjunto de cardinalidad $d_G(v)$ para cada $v \in V$, de modo que los X_v sean disjuntos a pares, entonces $\bigcup_{v \in V} X_v$ es equipotente a $E \times \{0, 1\}$ (de acuerdo con la construcción de von Neumann, usualmente se toma a $\{0, 1\}$ como el conjunto paradigmático de cardinalidad 2). Lo primero que se viene a la mente al momento de elegir a X_v es dejar que sea o bien el conjunto de vecinos de v, o bien el conjunto de aristas que inciden en v; sin embargo, con cualquiera de estas definiciones nos enfrentaríamos al problema de que los X_v no serían disjuntos por pares. De esta forma, unos momentos de reflexión nos llevan a proponer los conjuntos

$$X_v = \{(v, u) | \{v, u\} \in E\}.$$

La clave es que (v, u) es un par ordenado, y no simplemente un conjunto con dos elementos (de modo que (v, u) y (u, v) son dos pares ordenados distintos, ambos asociados a la arista $\{u, v\}$). Esto nos da la tranquilidad de saber que $X_v \cap X_u = \varnothing$ siempre que $v \neq u$.

Utilizando el axioma de elección, tomamos una función de elección $f : E \longrightarrow V$; esto es, una función tal que $f(e) \in e$ para todo $e \in E$. En otras palabras, f es un objeto que representa el haber elegido uno de los dos extremos de cada una de las aristas de la gráfica G. Así, definimos la función $\varphi : \bigcup_{v\in V} X_v \longrightarrow E \times \{0,1\}$ mediante la fórmula

$$\varphi(u,v) = \begin{cases} (\{u,v\},0), & \text{si } f(\{u,v\}) = u; \\ (\{u,v\},1), & \text{si } f(\{u,v\}) = v. \end{cases}$$

No es precisamente trivial, pero sí rutinario, demostrar que la función φ definida arriba es una biyección.

□

En la demostración anterior, la principal dificultad técnica es que, para cada arista $\{u,v\}$, tenemos dos copias de dicha arista (correspondientes a los pares ordenados (u,v) y (v,u)) y debemos decidir, al definir nuestra biyección φ, cuál de estas dos copias se manda a la pareja cuya segunda entrada es 0, y cuál a la pareja con segunda entrada 1. De alguna manera, estamos eligiendo un elemento dentro del conjunto $\{(u,v),(v,u)\}$ (estamos eligiendo, por ejemplo, cuál de los dos debe ser enviado a la pareja con segunda entrada igual a 1). De modo que el axioma de elección juega un papel crucial en la demostración previa; el apéndice al final de este artículo muestra que este axioma es, de hecho, indispensable, pues mostramos un ejemplo concreto (Ejemplo 6.14), en la teoría axiomática de Zermelo–Fraenkel sin el axioma de elección, en el cual el Teorema 3.2 es falso.

A continuación analizamos dos resultados que muestran un contraste interesante entre la combinatoria finita y la infinita. En primer lugar, tras haber demostrado el Teorema 3.2, en el caso de las gráficas finitas es inmediato verificar, como corolario, que la cantidad de vértices de grado impar debe de ser un número par (ya que la suma de todos estos grados, en total, debe de dar $2|E(G)|$, que es un número par, y la suma de una cantidad impar de números impares siempre resulta en un número impar). En el caso infinito, esto no necesariamente se cumple, como lo ilustra el ejemplo de un camino infinito en una dirección. En este caso, nuestra gráfica $G = (V,E)$ cuenta con una cantidad numerable de vértices, digamos que $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$, y hacemos $E = \{\{v_n, v_{n+1}\} | n \in \mathbb{N}\}$. Así obtenemos una gráfica (representada gráficamente en la Figura 1) con exactamente un vértice de grado 1, y los demás de grado 2.

En segundo lugar, tenemos otro resultado sencillo (que usualmente suele ser un ejercicio en los textos introductorios de teoría de gráficas): para cualquier gráfica (finita) con al menos dos vértices, siempre hay dos vértices con el mismo grado. La demostración de este resultado finito

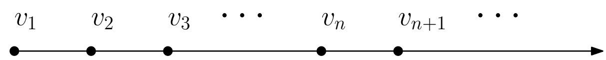

Figura 1: El camino infinito en una dirección.

reposa en el principio finito de la pichonera, de la manera siguiente: si suponemos que nuestra gráfica tiene n vértices, entonces (dado que únicamente estamos considerando gráficas simples) cada uno de esos vértices debe tener un grado (igual al número de sus vecinos) entre 0 y $n-1$. Si no hubiera dos vértices con el mismo grado, entonces los grados de cada uno de los vértices serían exactamente los números $0, 1, \ldots, n-1$, sin repeticiones; esto ya es una contradicción, pues no pueden existir simultáneamente un vértice de grado 0 (ningún vecino) y uno de grado $n-1$ (todos los demás vértices como vecinos). La demostración que acabamos de proporcionar está profundamente enraizada en la finitud de la gráfica en cuestión, por lo que no resulta sorprendente que, en el caso infinito, el análogo de este resultado sea falso. Para construir un contraejemplo, podemos tomar una gráfica con conjunto de vértices $V = \{v_n | n \in \mathbb{N}\}$, en donde el conjunto de aristas se define mediante $E = \{\{v_n, v_{n+k}\} | 0 < k \leq 2^n\}$. Nótese que, para cada n, el vértice v_n únicamente puede ser adyacente a vértices de la forma v_j con $1 \leq j \leq n + 2^n$; así, tenemos que $2^n \leq d(v_n) \leq 2^n + n < 2^{n+1} \leq d(v_{n+1})$. Por lo tanto, no es difícil verificar que la asignación $n \longmapsto d(v_n)$ es inyectiva; en otras palabras, no hay dos vértices de esta gráfica que tengan el mismo grado.

Recordemos que, en el caso de una gráfica finita G, se definen los números $\delta(G)$ y $\Delta(G)$ como los grados mínimo y máximo, respectivamente, de algún vértice de la gráfica. En el caso infinito, el conjunto de estos grados podría ser no-acotado; o inclusive podría darse el caso de que algunos de los grados sean cardinales infinitos. Esto nos fuerza a modificar la definición del grado máximo (la del grado mínimo, por otra parte, se puede mantener, gracias al resultado (de hecho, equivalente al axioma de elección) que afirma que la clase de todos los números cardinales está bien ordenada).

Definición 3.3. Sea $G = (V, E)$ una gráfica (finita o infinita). Se definen los siguientes dos parámetros:

1. $\delta(G) = \text{mín}\{d_G(v) | v \in V\}$,
2. $\Delta(G) = \sup\{d_G(v) | v \in V\}$.

A continuación enunciamos un resultado junto con uno de sus corolarios. El resultado afirma, en el caso infinito, exactamente lo mismo que en el caso finito; por su parte, el corolario presenta un fenómeno completamente nuevo que es exclusivo del dominio infinito.

Teorema 3.4. *Si $G = (V, E)$ es cualquier gráfica, entonces $|V|\delta(G) \leq 2|E| \leq |V|\Delta(G)$.*

Demostración. Dado que $\delta(G) \leq d_G(v) \leq \Delta(G)$ para todo $v \in V$, entonces tenemos que

$$|V|\delta(G) = \sum_{v\in V} \delta(G) \leq \sum_{v\in V} d_G(v) \leq \sum_{i\in V} \Delta(G) = |V|\Delta(G),$$

en donde todas las (des)igualdades son inmediatas en el caso finito, y en el caso infinito, la primera y última igualdad se siguen de

$$\sum_{v\in V} \delta(G) = \sup\{|V|, \delta(G)\} = \text{máx}\{|V|, \delta(G)\} = |V|\delta(G),$$

y

$$\sum_{v\in V} \Delta(G) = \sup\{|V|, \Delta(G)\} = \text{máx}\{|V|, \Delta(G)\} = |V|\Delta(G),$$

respectivamente.

□

Corolario 3.5. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica infinita tal que $\delta(G) > 0$. Entonces, $|V| = |E|$.*

Demostración. Como únicamente consideramos gráficas simples, $\Delta(G) \leq |V|$. Entonces (dado que $\delta(G)$ es positivo, y que $|V|$ es infinito) tenemos que:

$$\begin{aligned} |V| &= \text{máx}\{|V|, \delta(G)\} = |V|\delta(G) \leq 2|E| \\ &\leq |V|\Delta(G) = \text{máx}\{|V|, \Delta(G)\} = |V|, \end{aligned}$$

lo cual implica que $|V| = |E|$.

□

Desde luego que, en general, el corolario anterior difícilmente se cumplirá para gráficas finitas (excepto en casos muy especiales, como por ejemplo las gráficas C_n). También es claro que la hipótesis $\delta(G) > 0$ es esencial, pues de lo contrario, es posible añadir a una gráfica tantos vértices aislados como sea necesario para forzar a que el conjunto de vértices tenga una cardinalidad tan grande como se desee, sin alterar la cardinalidad del conjunto de aristas.

4 Árboles

Dada una gráfica $G = (V, E)$ y dos vértices $u, v \in V$, un (u, v)**-camino** es una sucesión finita de vértices $(v_0, \ldots, v_n)$ tal que $v_0 = u$, $v_n = v$ y $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. En este caso, decimos que n es la **longitud** del camino. Decimos que dos vértices $u, v \in V$ están **conectados** si y sólo si existe un (u, v)-camino en G. Todas estas definiciones son exactamente iguales a las utilizadas en el caso de gráficas finitas; al igual que en ese caso, la relación de estar conectado constituye una relación de equivalencia entre los vértices. A las subgráficas de G generadas por cada una de las clases de equivalencia se les llama **componentes conexas**, y decimos que G es **conexa** si y sólo si tiene exactamente una componente conexa. A un (u, u) camino de longitud no-cero le llamamos un **ciclo** de G, y decimos que G es **acíclica** si no admite ciclos.

Definición 4.1. A una gráfica acíclica se le llama un **bosque**. Un bosque conexo se denomina un **árbol**.

La terminología forestal, además de ser sugestiva, está plenamente justificada, ya que con estas definiciones un bosque constituye la unión de árboles (cada una de las componentes conexas). Notacionalmente, es común utilizar la letra T para denotar árboles, debido a la palabra "tree" que significa árbol en inglés.

A continuación enunciamos algunos hechos básicos acerca de árboles; todas las afirmaciones del presente párrafo son resultados clásicos en el caso de los árboles finitos, y se demuestran de manera exactamente idéntica en el caso de los árboles infinitos. Dado un árbol T, cualesquiera dos vértices están conectados mediante un único camino (la existencia del camino se debe a la conexidad, mientras que la unicidad del mismo se puede demostrar con facilidad utilizando el hecho de que T no contiene ciclos). En particular, dada una gráfica conexa G, tenemos que G es un árbol si y sólo si todas sus aristas son de corte (una arista e en una gráfica G se dice *de corte* si ambos extremos de e pertenecen a componentes conexas distintas de $G - e$, la gráfica que resulta de eliminar al elemento e del conjunto de aristas de G manteniendo el mismo conjunto de vértices, y es fácil demostrar –el mismo argumento funciona tanto en el caso finito como en el infinito– que una arista es de corte si y sólo si no está contenida en ningún ciclo de G). Consideraremos ahora los vértices de corte: un vértice en una gráfica $G = (V, E)$ es *de corte* si existe una partición $E = E_1 \cup E_2$ de las aristas de G tal que v es el único vértice común a las subgráficas generadas por E_1 y E_2. Esto es, en el caso finito, equivalente a decir que $G - v$ tiene (estrictamente) más componentes conexas que G; no así en el caso infinito, como se puede ver, por ejemplo, tomando una infinidad de gráficas finitas, G_n para $n \in \mathbb{N}$, y dejando que G sea la unión disjunta de las G_n: cualquier vértice de corte de alguna G_n sigue siendo vértice de corte de G, aunque la cardinalidad del conjunto de componentes conexas permanece constante (con valor $\aleph_0$). Sin embargo, si G es una gráfica conexa, entonces un vértice v de G es de corte si y sólo si $G - v$ es disconexa. En el caso particular de un árbol T, un vértice v de T es de corte si y sólo si $d(v) > 1$.

En contraste, un resultado clásico acerca de árboles finitos $T = (V, E)$ es que siempre satisfacen $|E| - 1 = |V|$. Esto es, en cierto sentido, trivialmente cierto para el caso de árboles infinitos: dado un árbol infinito $T = (V, E)$, al no haber vértices aislados (pues de lo contrario T no sería conexo), se satisface la igualdad $|E| = |V| = |V| + 1$, por el corolario 3.5. Sin embargo, un enunciado más fuerte, más informativo, y que presumiblemente refleja una más adecuada generalización de la igualdad $|E| - 1 = |V|$, es el siguiente.

Teorema 4.2. *Sea $T = (V, E)$ un árbol (finito o infinito), y sea $v_0 \in V$ arbitrario. Entonces existe una biyección $\varphi : V \setminus \{v_0\} \longrightarrow E$ tal que, para todo $v \in V \setminus \{v_0\}$, $\varphi(v)$ es una arista incidente en v.*

Demostración. Para cada $v \in V \setminus \{v_0\}$, sea $(v_0, \ldots, v_n)$, con $v = v_n$, el único (v_0, v)-camino, y denotemos $\varphi(v) = \{v_{n-1}, v_n\}$ (esto tiene sentido ya que, si $v \neq v_0$, entonces $n > 0$). Es rutinario verificar que la función $\varphi : V \setminus \{v_0\} \longrightarrow E$ satisface lo afirmado en el enunciado del teorema. $\square$

En el caso de los árboles finitos, el resultado $|E| = |V| - 1$ permite mostrar que todo árbol finito con al menos dos vértices contiene al menos dos vértices de grado 1 (pues de lo contrario, tendríamos $d_G(v) \geq 2$ para todos, excepto posiblemente uno, de los $v \in V$, y por lo tanto $2|V| - 2 = 2|E| = \sum_{v \in V} d_G(v) \geq 2(|V| - 1) + 1 = 2|V| - 1$, una contradicción). Esta última afirmación resulta falsa en el caso de los árboles infinitos, como se puede apreciar considerando el ejemplo del camino infinito en una dirección, ilustrado en la Figura 1. Como consecuencia de ello, también es falso, en el ámbito infinito, el enunciado (que sí se cumple en el caso finito) que afirma que toda gráfica conexa con más de un vértice tiene cuando menos dos vértices que no son de corte (nuevamente, el camino infinito en una dirección funciona como contraejemplo).

Ahora pasamos a hablar de árboles generadores en una gráfica. Dada una gráfica $G = (V, E)$, decimos que T es un *árbol generador* si es una subgráfica generadora de G (es decir, el conjunto de vértices de T es V mismo, y el conjunto de aristas de T es un subconjunto de E) que además es un árbol. En particular, toda gráfica que admite un árbol generador debe, al contener una subgráfica inducida[6] conexa, ser ella misma conexa. Resulta ser que la implicación recíproca también se cumple, y toda gráfica conexa admite un árbol generador. En el caso finito, esto se puede demostrar de manera más o menos constructiva –una opción es partir de G, y recursivamente eliminar aristas, una por una, de tal forma que la gráfica resultante siga siendo conexa (en el momento en que deja de ser posible eliminar una arista más, significa que la subgráfica que hemos obtenido hasta ese momento es un árbol); la otra opción es partir de la subgráfica generadora de G sin aristas, y progresivamente ir añadiendo aristas sin añadir ciclos (en el momento en que ya no es posible añadir una arista más, significa que la subgráfica obtenida hasta ahora, que es un árbol, ya es generadora). En el caso de gráficas infinitas, sin embargo, pese a que el resultado se mantiene verdadero, la demostración es notoriamente distinta –y significativamente no-constructiva, como veremos a continuación–.

Teorema 4.3. *Toda gráfica conexa admite un árbol generador.*

Demostración. Dada la gráfica conexa G, considérese el conjunto

$$\mathbb{P} = \{H | H \text{ es una subgráfica de } G \text{ y es un árbol}\},$$

parcialmente ordenado mediante la relación $H \leq H'$ si y sólo si H' es una subgráfica de H. Nótese que $\mathbb{P}$ es no vacío, ya que por lo menos contiene, para cualquier vértice de G, a la subgráfica (sin aristas) inducida por dicho vértice. Además, si suponemos que $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{P}$ es una cadena, entonces la unión $\tilde{H}$ de los elementos de $\mathscr{C}$ es también un elemento de $\mathbb{P}$, como argumentaremos a continuación. Si u, v son vértices de $\tilde{H}$, entonces u, v son vértices de algún $H \in \mathscr{C}$ (inicialmente, u y v podrían pertenecer a distintos elementos de $\mathscr{C}$, pero al ser $\mathscr{C}$ linealmente ordenado, alguno de estos dos elementos contiene al otro y por lo tanto contiene a ambos u, v), y por lo tanto existe un (u, v)-camino en H, camino que también está presente en $\tilde{H}$ y por lo tanto $\tilde{H}$ es conexa. Por otra parte, cualquier

[6] Recuerde que, dado un subconjunto de vértices X de una gráfica G, la **subgráfica inducida por** X es la subgráfica de G cuyo conjunto de vértices es X y cuyo conjunto de aristas consta de absolutamente todas las aristas de G con ambos extremos en X.

ciclo en $\tilde{H}$ también es un ciclo en algún $H \in \mathscr{C}$ (de entrada, cada arista del ciclo podría pertenecer a algún elemento distinto de $\mathscr{C}$, pero estos son sólo una cantidad finita y, al ser $\mathscr{C}$ linealmente ordenado, necesariamente alguno de estos elementos contiene a todos los demás y por lo tanto a todo el ciclo), lo cual contradiría que H es un árbol. Por lo tanto $\tilde{H}$ es acíclica.

Así, $\tilde{H} \in \mathbb{P}$ es una cota inferior para $\mathscr{C}$. Por lo tanto $\mathbb{P}$ satisface las hipótesis del lema de Zorn, de modo que existe un elemento minimal $T \in \mathbb{P}$. Entonces T es una subgráfica de G que es un árbol. Si T no fuera una subgráfica generadora, entonces podríamos encontrar un vértice v de G que no pertenece a T; sin embargo, al ser G conexa, debe de haber un (u, v)-camino tal que v es vértice de T. Sin pérdida de generalidad (recortando el camino de ser necesario) podemos suponer que ningún otro vértice recorrido por este camino pertenece a T, por lo que, al añadir este camino a la subgráfica T para obtener T', tendríamos que $T' \in \mathbb{P}$ y $T' \leq T$, contradiciendo que T es minimal.

□

El Teorema 4.3 constituye un ejemplo bastante paradigmático del fenómeno consistente en que resultados de combinatoria finita sigan cumpliéndose en el caso infinito, pero las demostraciones respectivas (de los casos finito e infinito) sean completamente diferentes. En particular, la sospecha (debido a la utilización del lema de Zorn) de que el Teorema 4.3 requiere del axioma de elección no es infundada, como lo podemos ver en el Ejemplo 6.15 del apéndice a este artículo.

En el caso finito, el Teorema 4.3 suele utilizarse en tándem con el Teorema 4.2 para concluir, como corolario, que toda gráfica conexa G satisface $|E| + 1 \geq |V|$ (pues la igualdad se cumple en cualquier árbol generador de G, y G tiene por lo menos tantas aristas como cualquiera de sus árboles generadores). En el caso infinito esto también es cierto, pero dista mucho de ser interesante, pues, si $G = (V, E)$ es una gráfica infinita y conexa, entonces (al ser conexa) debe tenerse que todo vértice de G es de grado al menos uno, con lo cual $|V| = |E| = |E| + 1$ por el Corolario 3.5.

Cerramos esta sección discutiendo brevemente la cuestión relativa al conteo de la cantidad de árboles generadores que admite una gráfica dada. El número $\tau(G)$ de una gráfica G se define (de una manera que funciona a la perfección tanto en el caso finito como en el infinito) como la cardinalidad del conjunto de todos los árboles generadores de G. Recordemos que, si e es una arista de G, entonces $G - e$ es la gráfica que resulta de eliminar al elemento e del conjunto de aristas de G (en otras palabras, el único cambio respecto de G es que los dos extremos de e ya no son adyacentes en $G-e$); por otra parte, recuérdese también que $G \cdot e$ es la gráfica que resulta de *contraer* la arista e (identificando ambos extremos de e para que se conviertan en un solo vértice). El siguiente resultado clásico en el estudio de las gráficas finitas puede trasplantarse sin mayor problema al caso infinito.

Teorema 4.4. *Si G es una gráfica, y e es una arista de G, entonces $\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \cdot e)$.*

Demostración. Basta notar que el conjunto de árboles generadores de G se puede partir en dos subconjuntos disjuntos, a saber, el conjunto de aquellos árboles generadores que contienen a la arista e, y el de aquellos que no la contienen. El segundo conjunto coincide exactamente con el conjunto de árboles generadores de $G-e$; por su parte, el primer conjunto se puede poner en una biyección obvia (mapeando al árbol T hacia $T \cdot e$) con el conjunto de árboles generadores de $G \cdot e$.

□

A diferencia del caso finito, en el caso infinito el Teorema 4.4 no nos resulta demasiado útil para calcular los números $\tau(G)$, ya que, en general, si G tiene una cantidad infinita de aristas entonces tanto $G-e$ como $G \cdot e$ tienen conjuntos de aristas de exactamente la misma cardinalidad; esto nos impide realizar el procedimiento, que sí funciona en el caso finito, por inducción sobre el número de aristas. En general, cualquier gráfica G con una cantidad infinita κ de aristas típicamente tiene suficiente variabilidad como para poder definir 2^κ distintos árboles generadores en ella. A continuación demostramos esta afirmación en el caso particular más fácil de manejar, a saber, el de las gráficas completas.

Teorema 4.5. *Sea λ un cardinal infinito. Entonces, $\tau(K_\lambda) = 2^\lambda$.*

Demostración. Sean V el conjunto de vértices, y E el conjunto de aristas, de la gráfica completa K_λ. Desde luego, $|V| = \lambda$; también es inmediato ver que $|E| = |[V]^2| = [\lambda]^2 = \lambda$. Nótese que podemos identificar a cada árbol generador de una gráfica con un subconjunto de su conjunto de aristas (aquellas que pertenecen al árbol, no habiendo ambigüedad en el conjunto de vértices, pues este debe ser, por definición, el conjunto de vértices de la gráfica original). Esto nos proporciona una función inyectiva que manda, en este caso particular, cada árbol generador de K_λ en un elemento de $\wp(E)$, y por lo tanto $\tau(K_\lambda) \leq 2^{|E|} = 2^\lambda$.

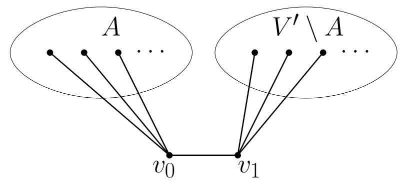

Figura 2: El árbol generador T_A de K_λ, para un subconjunto $A \subseteq V' = V \setminus \{v_0, v_1\}$.

Procedemos ahora a demostrar la desigualdad en el sentido contrario. Fijemos dos vértices $v_0, v_1 \in V$, y definamos $V' = V \setminus \{v_0, v_1\}$. Nótese que $|V'| = |V| = \lambda$. Para cada subconjunto $A \subseteq V'$, definimos la subgráfica T_A de K_λ como aquella subgráfica generadora (es decir, su conjunto de vértices es V mismo) cuyo conjunto de aristas viene dado por

$$\{\{v_0, v_1\}\} \cup \{\{v_0, v\} | v \in A\} \cup \{\{v_1, v\} | v \in V' \setminus A\}.$$

La subgráfica T_A de K_λ se muestra pictóricamente en la Figura 2, y no es difícil demostrar formalmente que T_A es, de hecho, un árbol generador de K_λ. Más aún, si $A, B \subseteq V'$ y $A \neq B$, entonces $T_A \neq T_B$ (pues un vértice $v \in A \setminus B$ indica que la arista $\{v_0, v\}$ pertenece a T_A pero no a T_B, y simétricamente para cualquier vértice en $B \setminus A$). Por lo tanto, la asignación $A \longmapsto T_A$ nos proporciona una función inyectiva desde $\wp(V')$ hacia el conjunto de árboles generadores de K_λ. La conclusión es que $\tau(K_\lambda) \geq 2^{|V'|} = 2^\lambda$, y hemos terminado.

$\square$

5 Coloraciones y número cromático

En esta sección analizaremos algunos fenómenos que surgen de considerar particiones del conjunto de vértices de una gráfica.

Definición 5.1. Dada una gráfica $G = (V, E)$, diremos que una κ-*coloración* de los vértices de V es alguno de los siguientes dos objetos:

1. una *partición de* V, es decir, una familia (indexada) de subconjuntos $\{C_\alpha \subseteq V | \alpha < \kappa\}$ disjuntos por pares tales que $V = \bigcup_{\alpha<\kappa} C_\alpha$, o bien

2. una función $c : V \longrightarrow \kappa$.

Diremos que la coloración es *apropiada* si separa vértices adyacentes: esto es, una partición $\{C_\alpha | \alpha < \kappa\}$ es apropiada si no hay dos elementos de C_α que sean adyacentes (en otras palabras, cada C_α es un *conjunto independiente*); equivalentemente, una función $c : V \longrightarrow \kappa$ es apropiada si para cualesquiera dos $u, v \in V$ que son adyacentes, debe tenerse que $c(u) \neq c(v)$.

Desde luego que hay una traducción obvia entre las dos posibles definiciones proporcionadas arriba: la función $c : V \longrightarrow \kappa$ da pie a la partición $\{C_\alpha | \alpha < \kappa\}$ definida por $C_\alpha = c^{-1}[\{\alpha\}]$; recíprocamente, a la partición $\{C_\alpha | \alpha < \kappa\}$ de V se le puede asociar la función $c : V \longrightarrow \kappa$ definida haciendo que, para todo $v \in V$, $c(v)$ sea el único α tal que $v \in C_\alpha$. Nótese que, crucialmente, la traducción entre el lenguaje de las particiones y el de las funciones preserva la noción de que una coloración sea, o deje de ser, apropiada. Es por ello que, a lo largo del presente artículo, utilizaremos la palabra "coloración" para designar a cualquiera de estos dos objetos matemáticos, sin hacer distinción entre ellos (en cierto sentido, estos dos conceptos, si bien no son literalmente equivalentes uno con el otro, sí lo son en algún sentido más metafórico).

De manera puramente intuitiva, informal y extramatemática, la palabra "coloración" proviene justamente de que nos estamos imaginando asignar colores a los vértices de nuestra gráfica: al vértice v le asignamos el color $c(v)$ si estamos pensando en términos de funciones; equivalentemente, el conjunto C_α representa a todos los vértices que recibieron el color α, cuando pensamos en términos de particiones.

De particular importancia es el llamado "número cromático" de una gráfica, ampliamente estudiado (tanto en el caso finito como en el infinito), y definido a continuación.

Definición 5.2. Sea G una gráfica.

1. Dado un número cardinal κ, diremos que G es *κ-cromática* si admite una κ-coloración apropiada.

2. Definimos el *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$, como el mínimo κ tal que G es κ-cromática.

Siempre que $\kappa \leq \kappa'$, cualquier κ-coloración puede pensarse como una κ'-coloración (haciendo $C_\alpha = \varnothing$ siempre que $\kappa < \alpha < \kappa'$, si se piensa en la coloración como una partición; alternativamente, considerando el codominio de la función c como el conjunto κ' en lugar de κ, si pensamos en las coloraciones como funciones); la coloración es apropiada al pensarla como una κ'-coloración si y sólo si ya lo era cuando se le concebía como una κ-coloración. Por lo tanto, toda gráfica κ-cromática es también κ'-cromática siempre que $\kappa \leq \kappa'$, y el número $\chi(G)$ señala precisamente el lugar donde se ubica esa frontera entre admitir o no admitir coloraciones apropiadas con cierto número de colores.

Una partición en singuletes (alternativamente, una función c inyectiva) testifica que toda gráfica $G = (V, E)$ admite una $|V|$-coloración apropiada; en particular, el número $\chi(G)$ siempre existe (al menos, cuando se supone el axioma de elección; véase la Proposición 6.16 para un ejemplo, sin el axioma de elección, de una gráfica cuyo número cromático no está bien definido).

El axioma de elección también resulta relevante para el concepto de la *compacidad* del número cromático. Para entender a cabalidad esta afirmación, recordemos que el teorema de Tychonoff, uno de tantos enunciados equivalentes al axioma de elección, establece que el producto arbitrario de espacios topológicos compactos (equipado, desde luego, con la topología producto) es él mismo también compacto (una demostración –utilizando, por supuesto, el axioma de elección– del teorema de Tychonoff puede encontrarse en [9, Theorem 37.3]). Recordemos, por otra parte, que un espacio topológico es compacto si y sólo si toda familia de subconjuntos cerrados con la PIF (propiedad de la intersección finita, que consiste en que cada intersección de una cantidad finita de elementos de la familia es no vacía) tiene una intersección no vacía (ver, por ejemplo, [9, Theorem 26.9]). El siguiente teorema es uno de los más importantes, tanto en el estudio de las gráficas infinitas, como en el marco de la teoría de conjuntos sin el axioma de elección.

Teorema 5.3 (Erdős–de Bruijn)**.** *Sea $G = (V, E)$ una gráfica infinita, y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que toda subgráfica finita de G admite una k-coloración apropiada. Entonces, G misma admite una k-coloración apropiada.*

Demostración. Consideremos el espacio topológico $X = \prod_{v \in V} \{1, \ldots, k\}$ (equipado con la topología producto que emana de equipar cada una de las copias de $\{1, \ldots, k\}$ con la topología discreta). Dado que cada uno de los espacios $\{1, \ldots, k\}$ es compacto Hausdorff, entonces X también lo es por el teorema de Tychonoff. Note que cada elemento de X, al ser formalmente una función $f : V \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$, se puede pensar como una coloración (no necesariamente apropiada) de los vértices de la gráfica G. Ahora considere, para cada arista $e = \{v, u\} \in E$,

$$F_e = \{c \in X | c(v) \neq c(u)\}.$$

No es difícil ver que cada conjunto F_e es cerrado. Además, la familia $\{F_e|e \in E\}$ tiene la PIF, pues si $E' \subseteq E$ es un subconjunto finito, y $Y = \bigcup_{e \in E'} e = \{v \in V | v \text{ es extremo de algún } e \in E'\}$, entonces

$$\bigcap_{e \in E'} F_e = \{c \in X | \text{La restricción de } c \text{ a } Y \text{ es apropiada}\} .$$

Este último conjunto es no vacío pues, por hipótesis, cada subgráfica finita (en este caso, en particular la subgráfica inducida por Y) admite una coloración apropiada (y extendiendo esta coloración arbitrariamente, sin importar si la coloración es apropiada o no fuera de Y, obtenemos un elemento $c \in \bigcap_{e \in E'} F_e$). De esta forma, por la compacidad de X, existe un elemento $c \in \bigcap_{e \in E} F_e$; es decir, un $c : V \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ tal que para cada arista $e = \{u, v\} \in E$, satisface $c(u) \neq c(v)$. En otras palabras, c es una k-coloración apropiada para G, y hemos terminado.

□

Como consecuencia del Teorema 5.3, si $\chi(H) \leq k$ para toda subgráfica finita H de G, entonces necesariamente debe tenerse que $\chi(G) \leq k$. En el pasado, se realizaron esfuerzos intensos por determinar exactamente cuánto del axioma de elección se utiliza en la demostración anterior. En dicha demostración, utilizamos el caso particular del teorema de Tychonoff en el cual se consideran productos topológicos de espacios Hausdorff. Ahora bien, como lo hemos dicho arriba, la versión completamente general del teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección; mientras tanto, la restricción de este teorema que versa únicamente sobre espacios Hausdorff es estrictamente más débil; y es, de hecho, equivalente a una versión débil del axioma de elección que ha sido abundantemente estudiada, que lleva por nombre *teorema del Ideal Primo Booleano*. Es de hecho posible demostrar que el teorema de Erdős–de Bruijn es equivalente al teorema del Ideal Primo Booleano. En un par de ocasiones más adelante tendremos oportunidad de utilizar nuevamente este teorema, en su encarnación como teorema de Tychonoff para espacios topológicos Hausdorff.

6 Emparejamientos en gráficas

En esta sección exploramos los emparejamientos, así como varias relaciones entre estos y el material tratado en las secciones anteriores.

Definición 6.1. Sea $G = (E, V)$ una gráfica.

1. Un *emparejamiento* de G es un conjunto $M \subseteq E$ tal que todo vértice $v \in V$ incide en a lo más una arista contenida en M (equivalentemente, si pensamos en los elementos de M como conjuntos –al ser aristas, son éstas conjuntos de dos vértices–, entonces que M sea un emparejamiento es equivalente a decir que M sea una familia de conjuntos disjuntos dos a dos).

2. Un emparejamiento M es *maximal* si no existe otro emparejamiento M' tal que $M \subsetneq M'$.

3. Un emparejamiento M es *máximo* si no existe otro emparejamiento M' tal que $|M| < |M'|$.

4. Un emparejamiento es *perfecto* si todo vértice $v \in V$ incide en algún elemento de M (pensando en los elementos de M como conjuntos, equivalentemente podemos decir que M es un emparejamiento perfecto si y sólo si $V = \bigcup_{e \in M} e$, es decir, M es una partición de V en subconjuntos de dos elementos).

Dado un emparejamiento M, a los vértices en los cuales incide algún elemento de M se les llama *M-emparejados*, o simplemente *emparejados* si el emparejamiento M está claro por el contexto. Nótese que toda gráfica cuenta con al menos un emparejamiento (el conjunto vacío, en el peor de los casos); de ahí también que toda gráfica cuente con un emparejamiento maximal: en el caso finito, basta ir añadiendo aristas una por una a un emparejamiento dado, hasta que ya no se pueda más, para obtener un emparejamiento maximal; en el caso infinito basta llevar a cabo una aplicación estándar del lema de Zorn. También es cierto que toda gráfica cuenta con un emparejamiento máximo; en el caso finito, esto puede verse con facilidad tomando, de entre todos los emparejamientos posibles –tan sólo hay una cantidad finita de ellos–, alguno con la máxima cardinalidad posible de elementos. En el caso infinito no es tan inmediato demostrar la existencia de emparejamientos máximos; sin embargo, es el caso que estos existen, aunque en este artículo omitimos la demostración[7].

Por otra parte, no es el caso que toda gráfica admita un emparejamiento perfecto, ni siquiera en el caso finito: cualquier gráfica con una cantidad impar de vértices constituye un contraejemplo. Dado que un emparejamiento M empareja a $2|M|$ vértices, y el máximo posible de

[7]La demostración corresponde a un trabajo, aún sin publicar, del primer autor en colaboración con Enrique Reyes.

vértices a emparejar es $|V|$, no es difícil ver que todo emparejamiento perfecto debe ser máximo; tampoco es difícil ver que todo emparejamiento perfecto es maximal. En el caso finito, un emparejamiento máximo necesariamente debe de ser maximal; no así en el caso infinito (piénsese en un emparejamiento máximo infinito M y tómese $e \in M$; entonces $M \setminus \{e\}$ tiene la misma cardinalidad de M y, por lo tanto, sigue siendo máximo, pero no es maximal).

A continuación trabajamos para indagar hasta qué punto se puede generalizar un teorema conocido como *de Berge*. Para ello introducimos la siguiente definición.

Definición 6.2. Sea $G = (V, E)$ una gráfica, y sea $M \subseteq E$ un emparejamiento de G.

1. Un *camino bi-infinito* es una sucesión de vértices, indexada por $\mathbb{Z}$, $(u_n | n \in \mathbb{Z})$, tal que u_n es adyacente a u_{n+1} para todo $n \in \mathbb{Z}$.

2. Un *camino infinito en una dirección* es una sucesión de vértices, indexada por $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, tal que u_n es adyacente a u_{n+1} para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Un *camino* es o bien un camino finito (tal y como se define al inicio de la sección 4), o bien un camino infinito en una dirección, o bien un camino bi-infinito.

4. Decimos que un camino $(u_n | n \in I)$ (en donde $I = \{0, \ldots, n\}$ para algún n si el camino es finito, $I = \mathbb{N} \cup \{0\}$ si el camino es infinito en una dirección, o bien $I = \mathbb{Z}$ si el camino es bi-infinito) es *M-alternante* si sus aristas se encuentran alternadamente en M y en $E \setminus M$, es decir, para cada $i \in I$ se tiene que $\{u_i, u_{i+1}\} \in M$ si y sólo si $\{u_{i+1}, u_{i+2}\} \in E \setminus M$.

5. Decimos que un camino es *M-aumentante* si, además de ser M-alternante, sus vértices inicial y final (en caso de que existan, es decir, en caso de que el camino sea finito, o bien únicamente su vértice inicial, en caso de que el camino sea infinito en una dirección) no están M-emparejados.

El *teorema de Berge*, clásico en el caso de las gráficas finitas, afirma que un emparejamiento M en una gráfica G es máximo si y sólo si G no admite ningún camino M-aumentante. En el caso infinito, esto ya no se cumple, como se puede apreciar con el ejemplo de la Figura 1, en el cual el emparejamiento $M = \{\{v_{2n}, v_{2n+1}\}|n \in \mathbb{N}\}$, que es máximo (al ser de cardinalidad $\aleph_0$, que es también la cardinalidad del conjunto de aristas y por lo tanto es la máxima cardinalidad alcanzable por cualquier emparejamiento de nuestra gráfica) y, sin embargo, el camino $(v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$ satisface que su vértice inicial v_1 no está M-emparejado, y por lo tanto dicho camino es M-aumentante. Una de las implicaciones del teorema, sin embargo, sí se cumple, como lo mostramos a continuación.

Teorema 6.3. *Si G es una gráfica, y M es un emparejamiento en G tal que G no admite caminos M-aumentantes, entonces M es un emparejamiento máximo.*

Demostración. Supongamos que M no es máximo, y tomemos un emparejamiento M' que sí sea máximo. De esta forma, debe tenerse que $|M| < |M'|$. Ahora, consideremos la gráfica H inducida por la diferencia simétrica $M \triangle M'$; note que todo vértice de H, al ser incidente a lo más con una arista de M y a lo más con una de M', debe de tener grado igual a 1 o 2. Esto implica que cada componente conexa de H es un camino (finito o infinito, y en caso de ser finito, es posible que sea un ciclo); más aún, cada uno de estos caminos es alternante entre M y M', pues todos los vértices de H son o bien M-emparejados o bien M'-emparejados, pero no ambas. En particular, ninguno de estos caminos puede ser un ciclo impar.

Así, cada componente conexa de H es o bien un ciclo par, o bien un camino infinito (ya sea infinito en una dirección, o bi-infinito), o bien un camino finito que no es un ciclo. En los dos primeros casos mencionados, la componente conexa en cuestión tiene tantas aristas pertenecientes a M como aristas pertenecientes a M'. Como $|M| < |M'|$, debe de haber por lo menos una (de hecho, una infinidad de) componente conexa que tiene más aristas de M' que de M. La única opción para tal componente es que sea un camino finito, que no es un ciclo, de longitud impar, y cuyos vértices inicial y final estén M'-emparejados pero no M-emparejados. En otras palabras, esta componente conexa es un camino M-aumentante.

□

De particular importancia en el estudio de la teoría de gráficas son las llamadas *gráficas bipartitas*, que son aquellas cuyo número cromático es igual a 2. Pictóricamente, este tipo de gráficas se suelen dibujar fijando una 2-coloración apropiada y colocando todos los vértices de un color en la parte de abajo, y todos los vértices del otro color en la parte de arriba, de tal forma que todas las aristas conecten vértices en la parte superior del dibujo con vértices en la parte inferior del mismo. En estos casos, normalmente a la coloración de la gráfica en dos colores, cuando se le piensa como una partición del conjunto de vértices, se dice que es una *bipartición de la gráfica*. A continuación discutimos un poco acerca de gráficas bipartitas infinitas y los criterios que nos puedan garantizar la existencia de ciertos emparejamientos, en especial perfectos, en dichas gráficas. El primer resultado a lo largo de estas líneas es una versión concreta de un resultado abstracto acerca de cardinalidades.

Teorema 6.4 (Cantor–Bernstein)**.** *Sea G una gráfica bipartita con bipartición (X, Y). Si existen dos emparejamientos, uno de los cuales empareja a todos los vértices de X y el otro que empareje a todos los vértices de Y, entonces G admite un emparejamiento perfecto.*

Demostración. Sea M un emparejamiento que empareja a todos los vértices de X, y sea M' un emparejamiento que empareja a todos los vértices de Y. Consideremos la subgráfica $H = (X \cup Y, M \cup M')$ de G (que es justamente la subgráfica que resulta de ignorar todas las aristas de G, excepto aquellas que pertenecen a M y a M'). Al ser M y M' emparejamientos, todo vértice en H tiene grado 1 o 2; como consecuencia de ello, cada componente conexa de H es un camino: un camino finito o un ciclo finito o un camino bi-infinito, o bien un camino infinito en una dirección. Construiremos el emparejamiento M'' como sigue: para cada componente conexa de H que sea infinita (ya sea que sea un camino infinito en una dirección, o un camino bi-infinito), tomamos alternadamente a las aristas de dicho camino (en el caso de un camino infinito en una dirección, lo hacemos comenzando por la primer arista del camino) y colocándolas en M''. Ahora, para cada componente conexa finita, es posible argumentar que debe de tratarse de un ciclo de longitud par, por lo que también es posible tomar alternadamente la mitad de las aristas del ciclo y colocarlas en el conjunto M''. Se verifica entonces que M'' es un emparejamiento (en H, y por lo tanto también en G) que empareja a todos los vértices de G.

□

Un célebre criterio, en el caso finito, para la existencia de emparejamientos, es conocido por diversos autores como el *teorema del matrimonio de Hall* [6] y establece que, en una gráfica bipartita finita con bipartición (X, Y), existe un emparejamiento que empareja a todos los vértices de X si y sólo si para todo $S \subseteq X$, se cumple que $|N(S)| \geq |S|$, en donde $N(S)$ denota al conjunto de todos los vértices que son adyacentes a algún elemento de S (es decir, $N(S)$ es el conjunto de vecinos de S). La razón del nombre "teorema del matrimonio" hace alusión a que, en cierta sociedad heteronormativa en la cual hipotéticamente quisiéramos generar matrimonios entre los hombres y las mujeres, representados respectivamente por X y Y, en donde una arista entre un elemento de X y uno de Y indica que ese hombre y esa mujer considerarían aceptable casarse, el teorema nos proporciona un criterio para determinar si es posible casar ya sea a todos los hombres, o a todas las mujeres de esa sociedad. Si bien el nombre del teorema es, hoy por hoy, a todas luces obsoleto, no lo es así el estudio matemático del mismo teorema. El análogo infinito de este teorema, como vemos a continuación, ya no es una equivalencia, aunque lo sigue siendo para una clase restringida de gráficas infinitas; lo que motiva las siguientes definición y teorema.

Definición 6.5. Una gráfica G es *localmente finita* si el grado de cada uno de sus vértices es finito.

Es inmediato notar que, en particular, toda gráfica finita es localmente finita.

Teorema 6.6. *Sea G una gráfica bipartita con bipartición (X, Y). Entonces:*

1. *Si G admite un emparejamiento que empareja a cada elemento de X, entonces todo $S \subseteq X$ satisface $|N(S)| \geq |S|$.*

2. *Si además G es localmente finita, y todo $S \subseteq X$ satisface que $|N(S)| \geq |S|$, entonces G admite un emparejamiento que empareja a todos los elementos de X.*

Demostración.

1. Sea M un emparejamiento que empareja a todos los elementos de X, y sea $S \subseteq X$. Entonces, cada $v \in S$ es incidente en alguna arista $e_v \in M$; definamos $f(v)$ como el extremo de e_v que es distinto de v, para todo $v \in S$, y notemos que $f(v)$ siempre es un elemento del conjunto $N(S)$. Entonces, la función $f : S \longrightarrow N(S)$ es inyectiva, lo cual muestra que $|S| \leq |N(S)|$.

2. Supongamos ahora que $G = (V, E)$ es localmente finita y que satisface la hipótesis de que $|S| \leq |N(S)|$ para todo $S \subseteq X$. Utilizaremos una vez más el teorema de Tychonoff; para ello, consideremos el espacio topológico $\prod_{e \in E}\{0,1\}$, el cual es compacto al serlo cada uno de sus factores (cada factor $\{0,1\}$ viene equipado con la topología discreta). Crucialmente, nótese que cada punto x de nuestro espacio topológico es la función característica de algún subconjunto $M_x = \{e \in E | x(e) = 1\}$ de E. Para cada $S \subseteq X$, sea

   $$F_S = \left\{ x \in \prod_{e \in E}\{0,1\} \;\middle|\; \begin{array}{l} M_x \text{ es un emparejamiento} \\ \text{que empareja a cada elemento de } S \end{array} \right\}$$

   A continuación verificaremos que cada uno de los subconjuntos F_S es cerrado. Pues si tenemos algún $S \subseteq X$ y algún $x \notin F_S$, entonces o bien M_x no es un emparejamiento (es decir, existen dos aristas $e_1, e_2 \in M_x$ que tienen alguno de sus extremos en común), o bien sí lo es, pero hay algún $v \in S$ que no es emparejado por M_x (es decir, si $e_1, \ldots, e_n$ son las aristas incidentes en v, entonces cada una de estas $e_i \notin M_x$; note que la cantidad de aristas incidentes en v es finita por ser G localmente finita). En el primer caso hacemos $U = \{x \in \prod_{e \in E}\{0,1\} | x(e_1) = 1 = x(e_2)\}$; en el segundo caso definimos $U = \{x \in \prod_{e \in E}\{0,1\} | x(e_i) = 0 \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}$; en ambos casos U es un subconjunto abierto de $\prod_{e \in E}\{0,1\}$, completamente disjunto con F_S, tal que $x \in U$, lo cual demuestra que el complemento del conjunto F_S es abierto. Además, siempre que $S \subseteq X$ sea un conjunto finito, tenemos que F_S es no vacío, ya que por el teorema de Hall finito siempre podemos elegir un emparejamiento en la subgráfica (finita) de G inducida por $S \cup N(S)$ que empareje a todo elemento de S; la función característica de tal emparejamiento es un elemento de F_S. Finalmente, note que, para $S_1, \ldots, S_k \subseteq X$, se cumple que $F_{S_1} \cap \cdots \cap F_{S_k} = F_{S_1 \cup \cdots \cup S_k}$ y por lo tanto, en caso de que cada uno de los S_i sea finito, esta intersección será no vacía. Así, la familia de conjuntos cerrados $\{F_S | S \subseteq X \text{ es finito}\}$ tiene la PIF, lo que implica que su intersección es no vacía. No es difícil verificar que, si

   $$x \in \bigcap_{S \subseteq X \text{ finito}} F_S,$$

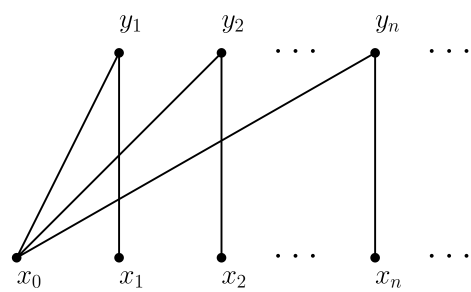

Figura 3: Una gráfica bipartita que satisface el criterio del teorema de Hall pero no admite emparejamientos que emparejen a todos los vértices x_n. Al vértice x_0, que es susceptible de emparejarse con cualquiera de los y_n, se le conoce como *el playboy.*

entonces en particular $x \in F_{\{v\}}$ para cada $v \in X$, por lo que M_x es un emparejamiento de G que empareja a todo elemento de X.

□

En el caso de las gráficas que no son localmente finitas, el recíproco de la implicación contenida en la primera parte del Teorema 6.6 no se cumple, como puede verse considerando a la gráfica $G = (X \cup Y, E)$, en donde $X = \{x_0\} \cup \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ y $Y = \{y_n | n \in \mathbb{N}\}$ son disjuntos, y

$$E = \{\{x_0, y_n\} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{x_n, y_n\} | n \in \mathbb{N}\}.$$

Esta gráfica está ilustrada en la Figura 3. No es difícil ver que, para cada $S \subseteq X$, $|N(S)| \geq |S|$ (pues $|N(S)|$ es o bien $|S|$, si $x_0 \notin S$, o bien $\aleph_0$, en caso contrario); por otra parte, G no admite ningún emparejamiento que empareje a todo elemento de X, pues tan pronto como x_0 está emparejado, digamos que por medio de la arista $\{x_0, y_n\}$, de inmediato se vuelve imposible emparejar al vértice x_n.

Si λ es un número cardinal, una gráfica se dice que es λ-*regular* si todos sus vértices tienen grado λ; una gráfica es *regular* si es λ-regular para algún λ. En el contexto de las gráficas finitas, una consecuencia inmediata del teorema del matrimonio de Hall[8] es que toda gráfica bipartita regular con bipartición (X, Y) debe satisfacer $|X| = |Y|$. En el caso infinito, probar que toda gráfica bipartita regular con bipartición (X, Y)

[8]De hecho, algunos autores, por Ejemplo [4], le llaman *teorema del matrimonio de Hall* no al enunciado del Teorema 6.6, sino al enunciado que presentamos a continuación.

satisface $|X| = |Y|$ es extremadamente sencillo, sin necesidad de utilizar ningún otro resultado como lema previo (y será un ejercicio interesante para el lector desarrollar tal demostración); sin embargo, como hemos resaltado anteriormente, la simple comparación de cardinalidades por lo general no nos proporciona enunciados lo suficientemente informativos al momento de estudiar gráficas infinitas. El resultado que presentamos a continuación sí es lo suficientemente informativo, pues nos proporcionará la biyección entre las dos clases de la bipartición no sólo en abstracto, sino en términos de las aristas de la gráfica en cuestión.

Teorema 6.7. *Sea G una gráfica bipartita regular. Entonces, G admite un emparejamiento perfecto.*

Demostración. Si G es localmente finita, el resultado se sigue de aplicar el teorema del matrimonio de Hall (Teorema 6.6) junto con el teorema de Cantor–Bernstein (Teorema 6.4). De modo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que G es κ-regular, para algún cardinal infinito κ. En este caso, note que cada componente conexa de G debe de tener cardinalidad κ: dado un vértice v_0 en dicha componente conexa, la componente es simplemente $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\{v \in V|d(v_0, v) = n\}$, y cada uno de los conjuntos $\{v \in V|d(v_0, v) = n\}$ tiene a lo más κ elementos, como es fácil demostrar de manera inductiva y utilizando el hecho de que G es κ-regular. Así, el emparejamiento perfecto se puede construir independientemente en cada componente conexa, lo que se traduce, en términos prácticos, a que podemos suponer sin perder generalidad que $|V| = \kappa$. Bien-ordenamos $V = \{v_\alpha|\alpha < \kappa\}$, y recursivamente construimos el emparejamiento $M = \{e_\alpha|\alpha < \kappa\}$, eligiendo simplemente, en el α-ésimo paso, y en caso de que v_α no sea incidente a ninguna arista en el conjunto $\{e_\xi|\xi < \alpha\}$, cualquier arista e_α incidente en v_α cuyo otro extremo no sea extremo de ninguna e_ξ con $\xi < \alpha$ (lo cual se puede hacer pues $\{e_\xi|\xi < \alpha\}$ es un conjunto de cardinalidad estrictamente menor que κ y v_α es un vértice de grado κ). Al final del proceso, el emparejamiento $M = \{e_\alpha|\alpha < \kappa\}$ es perfecto.

□

Acercándonos lentamente a la culminación de esta sección, mencionaremos, sin demostrar (debido a su grado de complejidad), algunos resultados de interés mayúsculo desde el punto de vista histórico. Para ello, habremos de enunciar la siguiente definición.

Definición 6.8. Sea $G = (V, E)$ una gráfica.

1. Una *cubierta por vértices* de G es un conjunto $C \subseteq V$ tal que toda arista de G incide en algún elemento de C.
2. La cubierta por vértices C de G se dice *minimal* si no existe otra cubierta por vértices C' tal que $C' \subsetneq C$.
3. La cubierta por vértices C de G se dice *mínima* si no existe otra cubierta por vértices C' tal que $|C'| < |C|$.

No es difícil ver (tanto en el caso finito, como en el infinito) que, si M es cualquier emparejamiento y C es cualquier cubierta, entonces $|M| \leq |C|$, pues cualquier función que mande a cada $e \in M$ a algún $v \in C$ que sea extremo de e (siempre hay por lo menos un extremo con esta característica, al ser C una cubierta) debe de ser una función inyectiva al ser M un emparejamiento. En particular, esta desigualdad sigue cumpliéndose cuando M es un emparejamiento máximo y C es una cubierta mínima. El siguiente teorema es uno bastante clásico en la teoría de gráficas finitas.

Teorema 6.9 (König). *Si G es una gráfica bipartita (finita), entonces la cardinalidad de cualquier emparejamiento máximo de G es igual a la cardinalidad de cualquier cubierta mínima de G.*

No es difícil demostrar que, en el caso de una gráfica bipartita infinita, el enunciado anterior acerca de cardinalidades sigue siendo cierto; nuevamente, este resultado no resulta demasiado informativo pues la cardinalidad no nos proporciona una distinción tan fina entre los diversos conjuntos infinitos. Una versión más explícita del resultado anterior nos sugeriría buscar, más que una simple igualdad de cardinalidades entre un emparejamiento máximo M y una cubierta mínima C, una correspondencia dada en términos de la gráfica –por ejemplo, la posibilidad de que a cada $e \in M$ le corresponda un único $c \in C$ tal que c sea extremo de e–. Este resultado más fuerte, cuya demostración constituye todo un *tour de force* técnico, de complejidad bastante considerable, fue demostrado por R. Aharoni.

Teorema 6.10 (Aharoni [1]). *Sea G una gráfica bipartita (finita o infinita). Entonces, existe un emparejamiento M, así como una cubierta por vértices C, tales que C consta de elegir exactamente un extremo de cada elemento de M.*

Lentamente nos encaminaremos a enunciar un resultado aún más fuerte. Comencemos por recordar que, para una gráfica conexa no completa G, se define $\kappa(G)$, la *conectividad* de la gráfica, como el mínimo número de vértices que debe uno eliminar de G para que el resultado sea disconexo; análogamente pero con aristas se define la *conectividad por aristas* $\kappa'(G)$. (Es posible definir también estos parámetros en una gráfica no conexa, pero entonces no es tan inmediata la generalización al caso infinito, por lo que en este caso únicamente estudiaremos los números de conexidad en gráficas conexas.) A un conjunto S de vértices tal que $G-S$ es disconexo, o bien a un conjunto L de aristas tal que $G-L$ es disconexo, se les conoce como *conjuntos de corte* (si es necesario, se especifica si el conjunto de corte es por vértices o por aristas, según sea el caso). El siguiente resultado es bien conocido en el caso finito; a continuación proporcionamos una demostración para el enunciado análogo correspondiente a las gráficas infinitas.

Teorema 6.11. *Si $G = (V, E)$ es una gráfica infinita, conexa, y no completa, entonces $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$.*

Demostración. La desigualdad $\kappa'(G) \leq \delta(G)$ se establece eligiendo un vértice $v \in V$ de grado $\delta(G)$, de modo y manera que, si S es el conjunto de aristas incidentes en v, necesariamente $G - S$ ha de ser disconexa (como mínimo, el singulete $\{v\}$ es una componente conexa de $G - S$, por lo que esta última tiene por lo menos otra componente que contiene a los demás vértices); así, S es un corte por aristas de cardinalidad $\delta(G)$.

Para establecer la desigualdad $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$, comencemos por notar que esta desigualdad se cumple automáticamente en caso de que $\kappa'(G) = |V|$ (ya que necesariamente, por definición, se cumple siempre que $\kappa(G) \leq |V|$). Así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\kappa'(G) < |V|$. Tomemos un corte por aristas L con $|L| = \kappa'(G)$, y sea Z el conjunto de vértices incidentes con algún elemento de L (técnicamente, $Z = \bigcup_{e \in L} e$). Note que $|Z| \leq 2|L|$ y, en particular, existen vértices de G que no pertenecen a Z. Ahora, cada componente conexa de $G - L$ debe intersectar a Z, de modo que Z admite una partición dada por sus intersecciones con las distintas componentes conexas de $G - L$. Uniendo miembros de esa partición de ser necesario, podemos obtener dos conjuntos disjuntos no vacíos X, Y tales que $Z = X \cup Y$ y de modo que ninguna componente conexa de $G - L$ intersecta a ambos X y Y (en particular, todo camino de algún elemento de X a algún elemento de Y debe involucrar alguna arista de L; más aún, todo tal camino involucra por lo menos a una arista que tiene un extremo en X y el otro en Y).

Sea $v \in V$ un vértice tal que $v \notin Z$, y supongamos sin pérdida de generalidad que la componente conexa de v en $G - L$ intersecta a X

(y por lo tanto no intersecta a Y). No es difícil verificar entonces que X constituye un conjunto de corte por vértices para G: por ejemplo, ningún elemento de Y está conectado con v en $G - X$ (de lo contrario, cualquier camino de algún $y \in Y$ a v puede utilizarse para construir un camino de y a algún $x \in X$, pero todo camino de tal naturaleza involucra alguna arista que tiene un extremo en X y el otro en Y, y tales aristas ya no pertenecen a $G - X$). Por lo tanto, sólo resta demostrar que $|X| \leq |L| = \kappa'(G)$ para llegar a la conclusión deseada. Ahora, si $|L| = \kappa'(G)$ es infinito, entonces tenemos que $|L| = |Z| = |X| + |Y| = \max\{|X|, |Y|\}$ y en particular $|X| \leq |L|$, por lo que hemos terminado. De modo que el resto de la demostración se enfocará en el caso cuando $|L| = \kappa'(G)$ es finito. En este caso, comencemos por notar que toda arista de L tiene un extremo en X y el otro extremo en Y. De lo contrario, si hubiera por ejemplo $y, y' \in Y$ tales que $\{y, y'\} \in L$, entonces $L \setminus \{\{y, y'\}\}$ ya es un conjunto de corte por aristas en G (pues cualquier camino conectando a y con algún $x \in X$ involucra al menos una arista con un extremo en X y el otro en Y, por lo que este camino existe en $G - (L \setminus \{y, y'\})$ si y sólo si existe en $G - L$). Como L es finito, tenemos que $\kappa'(G) \leq |L \setminus \{y, y'\}| = |L| - 1 = \kappa'(G) - 1$, una contradicción. El argumento para ver que L no contiene aristas con ambos extremos en X es enteramente similar. Por otra parte, note también que *toda* arista con un extremo en X y el otro en Y debe pertenecer a L (de lo contrario habría caminos de algún elemento de X a algún elemento de Y en $G - L$). De modo que cada elemento $x \in X$ es el extremo de por lo menos una arista de L; eligiendo de esta manera una arista de L por cada $x \in X$ obtenemos una función inyectiva de X en L, lo que implica que $|X| \leq |L|$.

$\square$

Se dice que dos caminos son *internamente disjuntos* si únicamente tienen en común sus vértices iniciales y finales. En general, decimos que una familia de caminos $\mathscr{F}$ es *internamente disjunta* si cualesquiera dos de sus elementos son internamente disjuntos. Varios de los resultados, en el caso finito, más básicos acerca de conectividad que involucran caminos internamente disjuntos siguen siendo ciertos, y con exactamente la misma demostración que en el caso infinito. Por ejemplo, toda gráfica (finita o infinita) es 2-conexa (es decir, satisface $\kappa(G) \geq 2$) si y sólo si para cualesquiera dos vértices, existen dos caminos internamente disjuntos que conectan a esos vértices.

A continuación, enunciamos el *teorema de Menger*. Recuérdese que, dados dos conjuntos de vértices X, Y en una gráfica, un conjunto S de vértices es (X, Y)-*separador* si todo camino de X a Y intersecta a S –equivalentemente, si en $G - S$ tenemos que ninguna componente conexa intersecta simultáneamente a X y a Y. El *teorema de Menger* afirma que, para cualesquiera dos conjuntos disjuntos de vértices X, Y, el tamaño mínimo de un conjunto (X, Y)-separador es igual al tamaño máximo de una familia internamente disjunta de caminos de X a Y. Este teorema se encuentra, por motivos históricos, estrechamente ligado al teorema de König: en el momento en que Menger publicó su teorema, su demostración tenía el problema de asumir, sin demostración, el caso bipartito –este hueco en la demostración fue justamente llenado por König al momento de publicar el teorema que lleva su nombre–.

No es difícil establecer como cierto el enunciado del teorema de Menger traducido palabra por palabra al caso infinito, pero, como ya viene siendo un tema recurrente, simplemente hablar de cardinalidades no es lo suficientemente informativo en este caso. Erdős conjeturó que una versión más fuerte, y más "explícita", del teorema, se podría demostrar. Finalmente, R. Aharoni y E. Berger lograron eventualmente establecer la conjetura de Erdős, resultado tanto de complejidad como de importancia enormemente significativa, que a continuación enunciamos sin demostración.

Teorema 6.12 (Aharoni–Berger [3])**.** *Sea $G = (V, E)$ una gráfica infinita, y sean $X, Y \subseteq V$. Entonces, existe una familia internamente disjunta $\mathscr{F}$ de caminos que van de X a Y, y existe un conjunto S que es (X, Y)-separador, tal que S consta de elegir exactamente un vértice interno de cada uno de los elementos de $\mathscr{F}$.*

Para concluir la sección, mencionaremos un criterio para la existencia de emparejamientos perfectos en una gráfica. En el caso de una gráfica finita G, se define $o(G)$ como la cantidad de componentes conexas *impares* (es decir, con una cantidad impar de vértices); un resultado clásico y básico en este contexto es que una gráfica finita G admite un emparejamiento perfecto si y sólo si $o(G - S) \leq |S|$ para todo $S \subseteq V$.

En el caso de una gráfica infinita, la primera reacción es extender las definiciones declarando que una componente infinita de G cuente como una componente par (finalmente, todo conjunto de cardinalidad infinita se puede partir en dos subconjuntos de cardinalidades iguales). Sin embargo, con esta definición únicamente se tiene una de las implicaciones con las que se cuenta en el caso finito: si $G = (V, E)$ es una gráfica que admite un emparejamiento perfecto, entonces para cada $S \subseteq V$ se cumple que $o(G - S) \leq |S|$. Pues para cada elemento de $o(G - S)$ se tiene por lo menos un vértice que no está emparejado con otro vértice en la misma componente de $G - S$, por lo cual la única opción es que esté emparejado con un elemento de S, y esto define una función inyectiva de $o(G - S)$ en S. Se queda como ejercicio para el lector verificar que la gráfica de la Figura 3, misma que ya vimos que no admite un emparejamiento perfecto, es un contraejemplo para la implicación recíproca.

Una vez más, nos topamos con un ejemplo que muestra que, en ocasiones, la clave para generalizar un resultado al caso infinito reside en la elección adecuada de las definiciones. Se dice que una gráfica es *factor-crítica* si, para todo vértice v de G, la gráfica $G - v$ admite un emparejamiento perfecto. Note que una gráfica factor-crítica finita debe de tener una cantidad impar de vértices; en el caso infinito, esta es la definición análoga "correcta" de componente impar. Entonces, se cuenta con el siguiente resultado.

Teorema 6.13 (Aharoni [2]). *Si G es cualquier gráfica, entonces G admite un emparejamiento perfecto si y sólo si para todo $S \subseteq V(G)$, es posible emparejar de manera inyectiva a cada componente factor-crítica de $G - S$ con los elementos de S.*

Apéndice

En este apéndice presentamos un par de ejemplos, construidos (consistentemente) dentro de la teoría ZF (es decir, dentro de los axiomas de Zermelo–Fraenkel, sin el axioma de elección), ejemplificando la manera en que varios de los teoremas demostrados anteriormente utilizan de manera esencial dicho axioma. Dado que no pretendemos introducir al lector a las vicisitudes técnicas de las pruebas de consistencia e independencia en ZF (toda una teoría de complejidad avanzada, que fácilmente puede requerir de varios cursos, a lo largo de varios semestres, para poder devenir familiarizado con ella), nos apoyaremos de manera sustancial en la confianza que nos tenga el lector al momento de afirmar que ciertos objetos (en concreto, un conjunto de Russell) existen de manera consistente con ZF –es decir, que no se puede demostrar la no existencia de dicho objeto únicamente con los axiomas de Zermelo–Fraenkel–. Sea como fuere, nuestras afirmaciones de consistencia vienen acompañadas de la correspondiente referencia en la cual el lector interesado, y versado en las técnicas relevantes (tanto la técnica de los modelos de permutaciones de Fraenkel–Mostowski, como en las técnicas del forzamiento y los modelos simétricos), pueda verificar la veracidad de nuestras afirmaciones.

Para construir nuestros ejemplos resulta crucial el concepto de un *conjunto de Russell*. Un conjunto de Russell es un conjunto X que admite una partición, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$, tal que cada P_n es un conjunto de cardinalidad exactamente dos (un par); y de tal suerte que ningún subconjunto infinito de la familia $\{P_n|n \in \mathbb{N}\}$ admite una función de elección. Durante el resto de esta sección, mantendremos la notación de X para un conjunto de Russell, y P_n para los pares que componen a dicho conjunto. Los conjuntos de Russell constituyen la contraparte formal del ejemplo de "una infinidad de parejas de calcetines" de B. Russell, y es posible demostrar que, consistentemente con los axiomas de ZF, tales conjuntos existen: por ejemplo, el conjunto de átomos en el segundo modelo de Fraenkel es un conjunto de Russell, véase [8, Sec. 4.4].

Ejemplo 6.14. *Una gráfica G, tal que $\sum_{v\in V(G)} d_G(v) \neq 2|E(G)|$.* Comenzamos por tomar un conjunto de Russell X, y nuestra gráfica será $G = (X, E)$ en donde $E = \{P_n|n \in \mathbb{N}\}$. Note que el conjunto de aristas de G es numerable (está indexado por el conjunto $\mathbb{N}$), por lo cual $2|E| = 2\aleph_0 = \aleph_0$. Note también que cada vértice de G tiene grado 1, por lo que tenemos que $\sum_{v\in V} d(v) = |X|$ (más formalmente, siguiendo la notación de la demostración del Teorema 3.2, para cada $x \in X$ podemos definir $X_x = \{(x, y)\}$, en donde $\{x, y\} = P_n$ para algún n; no es difícil verificar que la función $x \longmapsto (x, y)$, en donde y y n son los únicos tales que $\{x, y\} = P_n$, constituye una biyección entre X y $\bigcup_{x\in X} X_x$). Sin embargo, X no puede ser equipotente a $\aleph_0$ –ya que, de hecho, la existencia de una biyección entre X y $\mathbb{N}$, digamos que representada por $X = \{x_n|n \in \mathbb{N}\}$, implicaría que la función $n \longmapsto x_k$, en donde $k = \text{mín}\{m \in \mathbb{N}|x_m \in P_n\}$, constituya una función de elección para la familia $\{P_n|n \in \mathbb{N}\}$, una contradicción.

Es incluso posible verificar que $|X|$ no sólo no es igual a $\aleph_0$, sino que estas dos cardinalidades ni siquiera son comparables[9]; de esta forma, en nuestro ejemplo hemos obtenido que los cardinales $\sum_{v\in V(G)} d_G(v)$ y $2|E(G)|$ no son comparables.

[9]Cabe destacar que el enunciado "las cardinalidades están totalmente ordenadas" es equivalente al axioma de elección.

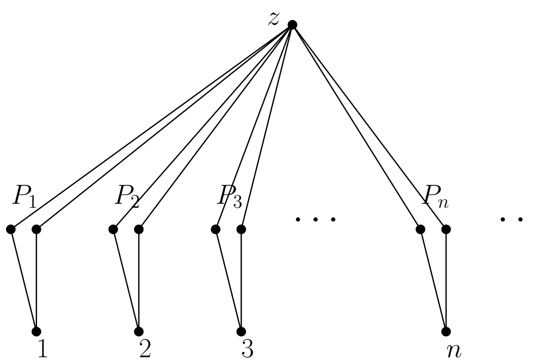

Figura 4: Una gráfica conexa sin árboles generadores (en el mundo sin el axioma de elección).

Ejemplo 6.15. *Una gráfica conexa que no admite un árbol generador.* Nuevamente, tomamos a nuestro conjunto de Russell X, tomemos un objeto $z \notin X$, y definamos la gráfica $G = (V, E)$ mediante

$$V = X \cup \{z\} \cup \mathbb{N},$$

y

$$E = \{\{z, x\} | x \in X\} \cup \{\{n, x\} | n \in \mathbb{N} \text{ y } x \in P_n\}.$$

La gráfica G se ilustra en la Figura 4. Es fácil ver que G es conexa; tampoco es complicado verificar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen exactamente dos (n, z)-caminos en G (ambos de longitud dos, en donde los vértices intermedios son respectivamente cada uno de los dos elementos de P_n). Por lo tanto, si G admitiera un árbol generador T, la elección de un único (n, z)-camino que pertenece a T nos proporcionaría una manera de elegir a un único elemento de P_n (a saber, el único que pertenece al único (n, z)-camino en T). En otras palabras, a partir de un árbol generador de G podríamos construir una función de elección para la familia $\{P_n | n \in \mathbb{N}\}$, lo cual es imposible; por lo tanto, G carece de árboles generadores.

En este momento pasamos a considerar el número cromático de una gráfica. En este contexto, el Ejemplo 6.14 ilustra un fenómeno bastante interesante.

Proposición 6.16. *La gráfica del Ejemplo 6.14 no tiene un número cromático bien definido.*

Demostración. En el contexto de la teoría de conjuntos sin el axioma de elección, supondremos que a cada conjunto X se le puede asignar de manera única un objeto, denotado por $|X|$, de tal forma que para cualesquiera dos conjuntos X y Y se satisfaga que $|X| = |Y|$ si y sólo si X es equipotente a Y[10].

Entonces, con la misma notación que en el Ejemplo 6.14, supongamos que A es un conjunto (de colores) y que $c : X \longrightarrow A$ es una coloración adecuada. Note que, para cada $a \in A$, el conjunto $c^{-1}[\{a\}]$ debe de ser finito. De lo contrario, dado que a lo más un elemento de cada P_n puede tener color a (es decir, $|c^{-1}[\{a\}] \cap P_n| \leq 1$), entonces esto nos proporcionaría una función de elección para algún subconjunto infinito de $\{P_n | n \in \mathbb{N}\}$, lo cual es una contradicción. De hecho, podemos definir la función $g : A \longrightarrow X$ dada por $g(a) = x$, en donde x es tal que $c(x) = a$ y $x \in P_n$ para $n \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $c^{-1}[\{a\}] \cap P_n \neq \varnothing$. De esta forma, la función g es inyectiva, y por lo tanto su imagen $\{g(a) | a \in A\}$ debe, para todo n lo suficientemente grande, de ser o bien disjunta con P_n o bien contener completamente a P_n como subconjunto (so pena de inducir una función de elección en un subconjunto infinito de $\{P_n | n \in \mathbb{N}\}$). En otras palabras, debe de existir un $N \subseteq \mathbb{N}$ y un conjunto finito $F \subseteq X$, que satisface $F \cap P_n = \varnothing$ siempre que $n \in N$, y tal que A es equipotente a $F \cup \bigcup_{n \in N} P_n$.

Esto nos permitirá mostrar que el conjunto de cardinales $|A|$ tales que G es A-coloreable carece de elemento mínimo. Pues si $c : X \longrightarrow A$ fuera una coloración adecuada, entonces, como se ha dicho más arriba, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A = F \cup \bigcup_{n \in N} P_n$ para algún $F \subseteq X$ finito, y para algún $N \subseteq \mathbb{N}$ tal que $F \cap P_n = \varnothing$ siempre que $n \in N$. Sea $M = N \setminus \{\text{mín}(N)\}$ y note que G también es B-coloreable, en donde $B = F \cup \bigcup_{n \in M} P_m$ (simplemente redefina c en los $x \in X$ tales que $c(x) \in P_k$, con $k = \text{mín}(N)$; esto es posible ya que únicamente existen una cantidad finita de tales elementos $x \in X$). Sin embargo, es posible demostrar[11] que no puede haber una función

[10] En principio, nos gustaría que, para cada X, $|X|$ fuera el conjunto de todos los conjuntos equipotentes a X (es decir, la clase de equivalencia de X, módulo equipotencia). Esto no es posible, ya que dicha colección es de hecho una clase propia; sin embargo, la técnica conocida como *truco de Scott* nos permite definir al objeto $|X|$ de manera que tenga las propiedades deseadas. Dado que los pormenores del truco de Scott constituyen una porción moderadamente avanzada de la teoría de conjuntos, en este artículo los omitimos, y simplemente suponemos que la asignación $X \longmapsto |X|$ está bien definida.

[11] Esto se debe a que todo subconjunto de un conjunto de Russell es *Dedekind-finito*, lo que significa que no tiene subconjuntos equipotentes a $\mathbb{N}$ y, equivalentemente, no

biyectiva $f : A \longrightarrow B$ (pues esta constituiría una función de A en A inyectiva pero no suprayectiva, ver la nota al pie de página), por lo cual $|B| \neq |A|$. Como además B admite una inyección en A (simplemente tómese la función inclusión), la conclusión es que $|B| < |A|$. Por lo tanto, para cualquier coloración de G, es posible encontrar otra coloración con una cantidad estrictamente menor de colores, y así el número $\chi(G)$ no está definido.

$\square$

Agradecimientos

El primer autor recibió apoyo parcial por parte del proyecto SIP-20221862 del IPN; el segundo autor realizó parte del presente trabajo como becario BEIFI bajo el mismo proyecto. Finalmente, el tercer autor colaboró con el presente artículo como parte del programa Delfín de investigación de verano de 2022.

David J. Fernández-Bretón
Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional,
Av. Instituto Politécnico Nacional s/n Edificio 9, Col. San Pedro Zacatenco, Alcaldía Gustavo A. Madero, 07738, CDMX, Mexico,
dfernandezb@ipn.mx

Jesús A. Flores Hinostrosa
Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional,
Av. Instituto Politécnico Nacional s/n Edificio 9, Col. San Pedro Zacatenco, Alcaldía Gustavo A. Madero, 07738, CDMX, Mexico,
jfloresh1501@alumno.ipn.mx

V. Adrián Meza-Campa
Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas,
Universidad Autónoma de Sinaloa.
Adscripción Actual: Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.
Jalisco S/N, Col. Valenciana, C.P. 36023 Guanajuato, Gto, México.
victor.meza@cimat.mx

L. Gerardo Núñez Olmedo
Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional,
Av. Instituto Politécnico Nacional s/n Edificio 9, Col. San Pedro Zacatenco, Alcaldía Gustavo A. Madero, 07738, CDMX, Mexico,
lnunezo1800@alumno.ipn.mx

Referencias

[1] R. Aharoni, *König's duality theorem for infinite bipartite graphs.* J. Lond. Math. Soc. (2) **29** no. 1 (1984), 1–12.

admite funciones inyectivas que no sean suprayectivas. El lector interesado puede atacar, como ejercicio, que si A admitiera un subconjunto numerable, entonces sería posible definir una función de elección en algún subconjunto infinito de $\{P_n \big| n \in \mathbb{N}\}$.

[2] R. Aharoni, *Infinite matching theory.* Discrete Math. **95** (1991), 5–22.

[3] R. Aharoni y E. Berger, *Menger's theorem for infinite graphs.* Invent. Math. **176** (2009), 1–62.

[4] Bondy, J.A. y Murty, U.S.R. *Graph Theory with Applications.* American Elsevier, New York, 1976.

[5] P.J. Cohen, *Set theory and the Continuum Hypothesis.* W.A. Benjamin, New York/Amsterdam, 1966.

[6] P. Hall, *On representatives of subsets.* J. London Math. Soc. **10** (1935), 26–30.

[7] P. Howard y J. Rubin, *Consequences of the Axiom of Choice.* American Mathematical Society, 1991.

[8] T. Jech, *The Axiom of Choice.* North Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1973.

[9] J. R. Munkres, *Topology. Second Edition.* New Jersey, Prentice Hall, 2000.