

# Acerca de los diagramas de persistencia en el análisis topológico de datos \*

Miguel A. Maldonado <sup>1</sup>      Óscar Robles <sup>2</sup>  
Claudia Andrea Vidales-Basurto <sup>3</sup>

## Resumen

Un diagrama de persistencia es una representación visual de las características topológicas de un complejo simplicial detectadas mediante un análisis homológico. En este trabajo revisaremos los antecedentes algebraicos que garantizan la existencia de dichos diagramas y mostraremos el cálculo correspondiente para una filtración sencilla.

*Clasificación:* 55N99, 55U10, 16W50

*Palabras y expresiones claves:* homología persistente, análisis topológico de datos, diagrama de persistencia, topología aplicada.

## 1 Introducción

La homología persistente es una herramienta de gran alcance usada para detectar, expresar y analizar características geométricas de espacios que surgen de la ciencia de datos, a través de clases de homología, ya sea simplicial, singular o alguna otra versión adecuada a los fines del problema. Los inicios de la homología persistente como área de trabajo pueden rastrearse en el trabajo de P. Frosini a principios de los 90's, o los estudios de V. Robins acerca de espacios muestreados a finales de los 90's. Sin embargo, es el trabajo de H. Edelsbrunner, D. Letscher y A. Zomorodian ([3]) el que hace que esta área adquiera gran relevancia.

---

\*Parte de la tesis de licenciatura del segundo autor (2) bajo la asesoría del primer autor (1) y de la tercera autora (3). El examen de grado se presentó en marzo de 2024.

Por ejemplo, en la ciencia de datos, la representación de imágenes en términos de sus características topológicas, permite identificar patrones y relaciones que no son evidentes con los métodos tradicionales.

Parte importante del análisis que surge en la homología persistente consiste en determinar que tan prominentes son las características detectadas. Esto es, una vez que las clases de homología reflejan ciertas características geométricas es preciso determinar que tan significativas son dentro del estudio, lo cual puede hacerse a través de su *tiempo de vida*. Así, clases de homología con un tiempo de vida corto no son tan significativas como que las de un tiempo de vida largo. El *diagrama de persistencia* asociado es una representación de los tiempos de vida de las clases de homología en el plano extendido

$$\overline{\mathbb{R}^2} = (\mathbb{R} \cup \{\infty\})^2$$

y la información que pueda leerse en él permite obtener un análisis simple de las características de interés, de ahí su importancia.

Al ser un reflejo de la información geométrica relevante de una filtración, el diagrama de persistencia se vuelve un objeto de estudio esencial dentro del análisis topológico de datos. Su existencia es una consecuencia del *teorema estructural* de módulos graduados del tipo finito, un resultado que permite expresar un módulo de persistencia como una suma directa de módulos intervalos, los cuales contienen la información que determina al diagrama de persistencia.

En el presente trabajo revisamos la teoría de módulos graduados necesaria para asegurar la existencia de los diagramas de persistencia. Con este objetivo, el concepto de módulo de persistencia, así como el de homología persistente, se introduce en la sección 2. Una vez que se han revisado los conceptos necesarios, la sección 3 contiene los resultados que permiten obtener el teorema estructural de la homología persistente; esto es, el resultado que establece las condiciones para que un módulo de persistencia se descomponga en módulos de intervalos. La información obtenida de tal descomposición permitirá codificar al módulo de persistencia a través de su diagrama de persistencia asociado, el cual es estudiado en la sección 4. Finalmente, en la sección 5, damos un análisis del diagrama de persistencia de un cálculo particular de homología persistente.

El presente trabajo forma parte del proyecto de tesis de licenciatura [7]. Invitamos a los lectores a consultarlo en caso de requerir mayores detalles.

## 2 Módulos de persistencia

Esta sección se basa en las notas [6] de V. Nanda. A menos que se diga lo contrario, los espacios vectoriales que se usarán en el presente trabajo serán sobre un campo  $\mathbb{F}$  de característica cero.

Un **módulo de persistencia**  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  es una sucesión de espacios vectoriales y transformaciones lineales  $a_k$ , para  $k \geq 0$  como en el siguiente diagrama

$$V_0 \xrightarrow{a_0} V_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_{k-1}} V_k \xrightarrow{a_k} V_{k+1} \xrightarrow{a_{k+1}} \dots$$

En este contexto, para cualesquiera  $i, j \in \mathbb{Z}_0^+$  con  $i < j$ , definiremos a la transformación  $a_{i \rightarrow j} : V_i \rightarrow V_j$  como

$$a_{i \rightarrow j} := a_{j-1} \circ a_{j-2} \circ \dots \circ a_i,$$

y para cada  $i$  definimos  $a_{i \rightarrow i}$  como la identidad en  $V_i$ . Decimos que un módulo de persistencia  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  es de **tipo finito** si  $V_k$  es de dimensión finita para cada  $k \geq 0$  y existe  $k_0 \in \mathbb{Z}_0^+$  tal que  $a_k : V_k \rightarrow V_{k+1}$  es un isomorfismo para cada  $k \geq k_0$ . El **módulo de persistencia trivial** es el módulo de persistencia  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  en el cual cada  $V_k$  es un espacio vectorial trivial.

Para cada pareja de enteros no negativos  $i \leq j$ , definiremos el **espacio de persistencia** del módulo de persistencia  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  como el subespacio de  $V_j$  dado por

$$\mathbf{PH}_{i \rightarrow j}(V_k, a_k) = \text{Im}(a_{i \rightarrow j}),$$

y a la dimensión  $\beta^{i,j} = \dim(\mathbf{PH}_{i \rightarrow j}(V_k, a_k))$  le llamaremos un **número de Betti persistente** de  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$ .

Decimos que un vector  $v \in V_i$  **nace** en el índice  $i$  si  $v \notin \text{Im}(a_{i-1})$ ; similarmente para dicho  $v$ , decimos que éste **muere** en el índice  $j \geq i$  si  $j$  es el menor entero tal que  $a_{i \rightarrow j}(v) = 0$ . Si no existe  $j$  que satisfaga lo anterior, decimos que  $v$  muere en el índice  $+\infty$ . La **persistencia** de  $v$  se define como la diferencia entre el índice de muerte y el índice de nacimiento, es decir  $j - i$ ; en caso de que  $v$  muera en  $+\infty$  su persistencia es  $+\infty$ .

Un **morfismo** de módulos de persistencia

$$f : \{V_k, a_k\}_{k \geq 0} \rightarrow \{W_k, b_k\}_{k \geq 0}$$

es una familia de transformaciones lineales  $f_k : V_k \rightarrow W_k$  que satisfacen

$$b_i \circ f_i = f_{i+1} \circ a_i,$$

para cada  $i \geq 0$ . Es decir, los cuadrados del siguiente diagrama son conmutativos

$$\begin{array}{ccccccccccc} V_0 & \xrightarrow{a_0} & V_1 & \xrightarrow{a_1} & \cdots & \xrightarrow{a_{k-1}} & V_k & \xrightarrow{a_k} & V_{k+1} & \xrightarrow{a_{k+1}} & \cdots \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k+1} & & \\ W_0 & \xrightarrow{b_0} & W_1 & \xrightarrow{b_1} & \cdots & \xrightarrow{b_{k-1}} & W_k & \xrightarrow{b_k} & W_{k+1} & \xrightarrow{b_{k+1}} & \cdots \end{array}$$

Decimos que dos morfismos de módulos de persistencia

$$f, g : \{V_k, a_k\}_{k \geq 0} \rightarrow \{W_k, b_k\}_{k \geq 0}$$

son **iguales** si  $f_k = g_k$  para cada  $k \geq 0$ .

Un **submódulo** de un módulo de persistencia  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  es un módulo de persistencia  $\{V'_k, a'_k\}_{k \geq 0}$  donde  $V'_k$  es un subespacio de  $V_k$  y  $a'_k$  es la restricción de  $a_k$  a  $V'_k, \forall k \geq 0$ . En este caso se tiene un morfismo inclusión  $i : \{V'_k, a'_k\}_{k \geq 0} \rightarrow \{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$ .

Un morfismo de módulos de persistencia

$$f : \{V_k, a_k\}_{k \geq 0} \rightarrow \{W_k, b_k\}_{k \geq 0}$$

es un **isomorfismo** si existe un morfismo de módulos de persistencia  $g : \{W_k, b_k\}_{k \geq 0} \rightarrow \{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  tal que  $g \circ f = i_V, f \circ g = i_W$ . En tales circunstancias se dice que los módulos de persistencia  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  y  $\{W_k, b_k\}_{k \geq 0}$  son **isomorfos**; en particular,  $\text{rank}(a_k) = \text{rank}(b_k), \forall k$ . Observemos que un morfismo de módulos de persistencia es un isomorfismo si y solo si cada transformación lineal  $f_k : V_k \rightarrow W_k$  es un isomorfismo.

Dada una colección no vacía de módulos de persistencia

$$\{\{V_k^\alpha, a_k^\alpha\}_{k \geq 0} \mid \alpha \in \Omega\},$$

definimos su **suma directa**  $\bigoplus_{\alpha \in \Omega} \{V_k^\alpha, a_k^\alpha\}_{k \geq 0}$  como el módulo de persistencia tal que su  $k$ -ésimo espacio vectorial es la suma directa  $\bigoplus_{\alpha \in \Omega} V_k^\alpha$  y para cada  $k \geq 0$  se considera a la transformación lineal

$$\bigoplus_{\alpha \in \Omega} a_k^\alpha : \bigoplus_{\alpha \in \Omega} V_k^\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in \Omega} V_{k+1}^\alpha \quad (v_\alpha)_{\alpha \in \Omega} \mapsto (a_k^\alpha(v_\alpha))_{\alpha \in \Omega}$$

En particular, dado un módulo de persistencia  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  denotamos por  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}^r$  a la suma directa

$$\{V_k, a_k\}_{k \geq 0} \bigoplus \{V_k, a_k\}_{k \geq 0} \bigoplus \cdots \bigoplus \{V_k, a_k\}_{k \geq 0},$$

del módulo consigo mismo  $r$  veces.

Decimos que un módulo de persistencia  $\{I_k, c_k\}_{k \geq 0}$  es **indescomponible** si siempre que se tenga un isomorfismo de módulos de persistencia

$$\{I_k, c_k\}_{k \geq 0} \cong \{V_k, a_k\}_{k \geq 0} \oplus \{W_k, b_k\}_{k \geq 0}$$

uno de los factores del lado derecho es el módulo de persistencia trivial.

El siguiente resultado establece condiciones para detectar un módulo indescomponible

**Proposición 2.1.** *Sea  $\{I_k, c_k\}_{k \geq 0}$  un módulo de persistencia no trivial y suponga que existen índices  $i \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , con  $i < j$ , tales que*

$$\dim I_p = \begin{cases} 1, & i \leq p < j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{rank}(c_p) = \begin{cases} 1, & i \leq p < j - 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces  $\{I_k, c_k\}_{k \geq 0}$  es indescomponible.

*Demostración.* Consideremos un isomorfismo

$$f : \{I_k, c_k\}_{k \geq 0} \longrightarrow \{V_k, a_k\}_{k \geq 0} \oplus \{W_k, b_k\}_{k \geq 0}$$

y notemos que  $\dim(I_k) = \dim(V_k) + \dim(W_k)$ ,  $\forall k \geq 0$ .

Dado que  $\dim(I_k) = 0$  para  $k < i$  y para  $k \geq j$ , se tiene que  $\dim(V_k) = \dim(W_k) = 0$ . Por otro lado, para cada  $k$  tal que  $i \leq k < j$ , tenemos  $\dim(V_k) = 1$ ,  $\dim(W_k) = 0$ , o bien  $\dim(V_k) = 0$ ,  $\dim(W_k) = 1$ , esto ya que  $\dim(I_k) = 1$  para dichos valores de  $k$ . Sin pérdida de generalidad asumamos  $\dim(V_i) = 1$ ,  $\dim(W_i) = 0$ , y tomemos  $i < j - 1$  pues si  $i = j - 1$  el módulo  $\{W_k, b_k\}_{k \geq 0}$  es trivial.

Para  $k = i$  tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} I_i & \xrightarrow{c_i} & I_{i+1} \\ \downarrow f_i & & \downarrow f_{i+1} \\ V_i \oplus W_i & \xrightarrow{a_i \oplus b_i} & V_{i+1} \oplus W_{i+1} \end{array}$$

Por un lado tenemos que  $V_i \oplus W_i = V_i \oplus 0$ , así que  $\text{Im}(a_i \oplus b_i) = \text{Im}(a_i) \oplus 0$ . Por otro lado  $\text{rank}(c_i) = \text{rank}(a_i \oplus b_i)$ , así que  $\text{rank}(a_i \oplus b_i) = 1$ . Además,

dado que  $I_{i+1} \cong V_{i+1} \oplus W_{i+1}$  obtenemos que  $\dim(I_{i+1}) = 1$ , por lo que  $\dim(V_{i+1} \oplus W_{i+1}) = 1$ . Finalmente, por un argumento de dimensión, se tiene que  $\text{Im}(a_i \oplus b_i) = V_{i+1} \oplus W_{i+1}$ , por lo que  $V_{i+1} \oplus W_{i+1} = \text{Im}(a_i) \oplus 0$ , con lo que se obtiene  $W_{i+1} = 0$ .

Aplicando el razonamiento anterior de manera inductiva para  $i \leq k < j - 1$ , concluimos que  $\dim(W_k) = 0$  para estos valores de  $k$ , por lo que  $\{W_k, b_k\}_{k \geq 0}$  es un módulo de persistencia trivial.  $\square$

Los enteros  $i, j$  del resultado anterior son de gran importancia dentro de la teoría de persistencia porque determinan de manera única, salvo isomorfismo, al módulo indescomponible  $\{I_k, c_k\}_{k \geq 0}$ . A su vez, esto permite considerar ciertos módulos de persistencia con una estructura particular. Dados  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  con  $0 \leq i < j \leq +\infty$  y definimos el **módulo intervalo**  $\{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}$  como

$$I_p^{i,j} = \begin{cases} \mathbb{F}, & i \leq p < j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad c_p^{i,j} = \begin{cases} \text{id}_{\mathbb{F}}, & i \leq p < j - 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los módulos intervalo son los objetos elementales dentro de la teoría de homología persistente en el sentido de que todo módulo de persistencia de tipo finito puede construirse como suma directa de módulos intervalo, como lo establece el teorema estructural 3.4, el cual será el tema de la próxima sección.

### 3 El teorema estructural

En esta sección presentamos el teorema estructural de la homología persistente. Para poder entenderlo, así como a su demostración, será necesario revisar algunos conceptos elementales de álgebra conmutativa como el de módulo graduado; se puede encontrar más información acerca de este tema en el texto [5] de T. Marley. Gran parte de sección está basada en el artículo [8] de A. Zomorodian y G. Carlsson.

Recordemos que un **anillo graduado**  $R$  es aquel que se puede descomponer como suma directa de subgrupos abelianos  $R = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_i$ , de manera que  $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{Z}$ , donde

$$R_i R_j = \{r_i \cdot r_j : r_i \in R_i, r_j \in R_j\}.$$

Un anillo graduado  $R$  se dice **graduado no negativamente** si  $R_i = 0$  para cada  $i < 0$ . Un ejemplo clásico es el anillo de polinomios  $R[t]$ ,

donde  $R$  es un anillo; en este caso la graduación está dada por

$$R[t] = \left( \bigoplus_{i < 0} 0 \right) \oplus \left( \bigoplus_{i \geq 0} Rt^i \right),$$

donde  $Rt^i = \{rt^i : r \in R\}$ . A esta descomposición se le llama la **graduación estándar** de  $R[t]$ .

Sea  $R$  un anillo graduado y  $M$  un  $R$ -módulo. Decimos que  $M$  es un  **$R$ -módulo graduado** si existe una familia de subgrupos  $\{M_i : i \in \mathbb{Z}\}$  de  $M$  tales que

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i,$$

y  $R_i M_j \subseteq M_{i+j}$  para cualesquiera  $i, j \in \mathbb{Z}$ , donde

$$R_i M_j = \{r_i \cdot m_j : r_i \in R_i \text{ y } m_j \in M_j\}.$$

Notemos que un anillo graduado  $R$  es un  $R$ -módulo graduado cuando se considera como  $R$ -módulo sobre sí mismo. Un módulo graduado  $M$  se dice **graduado no negativamente** si  $M_i = 0$  para cada  $i < 0$ .

Para un módulo graduado  $M$ , cada  $m \in M$  se puede escribir de manera única como

$$m = \sum_{i \in \mathbb{Z}} m_i$$

con  $m_i \in M_i$  para cada  $i \in \mathbb{Z}$  y solo una cantidad finita de los sumandos no nulos. Los  $m_i$  no nulos en la suma anterior son las **componentes homogéneas** de  $m$ .

Dados dos módulos graduados  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i, N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} N_i$ , un homomorfismo de  $R$ -módulos  $f : M \rightarrow N$  es llamado **homomorfismo graduado** si  $f(M_i) \subseteq N_i, \forall i \in \mathbb{Z}$ . Por ejemplo, para cada  $R$ -módulo graduado  $M$ , la función identidad  $\text{id}_M : M \rightarrow M$  es un homomorfismo graduado.

Se dice que un homomorfismo graduado  $f : M \rightarrow N$  es un **isomorfismo graduado** si existe un homomorfismo graduado  $g : N \rightarrow M$  tal que  $g \circ f = \text{id}_M$  y  $f \circ g = \text{id}_N$ . En este contexto decimos que  $M$  y  $N$  son **isomorfos como módulos graduados**; notemos que podemos tener módulos graduados  $M$  y  $N$  que son isomorfos como  $R$ -módulos, pero no como  $R$ -módulos graduados.

A. Zomorodian y G. Carlsson fueron de los primeros en reconocer la relación que existe entre módulos de persistencia y módulos graduados sobre  $\mathbb{F}[t]$ . En lo que sigue daremos algunos detalles de dicha relación.

Consideremos un módulo de persistencia  $V = \{V_i, a_i\}_{i \geq 0}$ . Para la graduación estándar en el anillo polinomial  $\mathbb{F}[t]$  definimos el  $\mathbb{F}[t]$ -módulo

$$M = \left( \bigoplus_{i < 0} 0 \right) \oplus \left( \bigoplus_{i \geq 0} V_i \right),$$

donde la acción de  $\mathbb{F}[t]$  sobre  $M$  está dada por

$$t(m_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (m'_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \text{ donde } m'_i = \begin{cases} 0, & i \leq 0 \\ a_{i-1}(m_{i-1}), & i > 0, \end{cases}$$

Para un elemento  $r \in \mathbb{F}$  se define  $r(m_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (rm_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ .

**Proposición 3.1.** *Bajo las condiciones anteriores  $M$  es un  $\mathbb{F}[t]$ -módulo graduado mediante la graduación*

$$M_i = \begin{cases} 0, & i < 0 \\ \left( \bigoplus_{j < i} 0 \right) \oplus V_i \oplus \left( \bigoplus_{j > i} 0 \right), & i \geq 0 \end{cases}$$

Más aún, si  $V$  es de tipo finito,  $M$  es finitamente generado.

*Demostración.* Sea  $m = (m_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in M$ , con  $m_i = 0$ , para  $i < 0$ , y  $m_i \in V_i, i \geq 0$ ; denotemos por  $m_{i_1}, \dots, m_{i_s}$  a las componentes no nulas de  $m$ . De esto tenemos que

$$m = \sum_{j=1}^s (\delta_{i_j, i} m_{i_j})_{i \in \mathbb{Z}},$$

donde  $\delta_{i_j, i}$  denota la delta de Kronecker.

Notemos que  $(\delta_{i_j, i} m_{i_j})_{i \in \mathbb{Z}} \in M_{i_j}$ , para  $j \in \{1, \dots, s\}$ , así que cada elemento  $m \in M$  se puede escribir como  $m = \sum_{j \in \mathbb{Z}} m'_j$ , con  $m'_j \in M_j$  para cada  $j \in \mathbb{Z}$  y solo una cantidad finita de los  $m'_j$  no nulos; no es complicado mostrar que esta representación es única por lo que se tiene  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ .

Sean  $p(t) \in (\mathbb{F}[t])_i$  y  $m \in M_j$ . Si  $i < 0$  ó  $j < 0$  entonces  $p(t)m = 0 \in M_{i+j}$ . Por otro lado, si  $i, j \geq 0$ , hacemos  $p(t) = rt^i$  y  $m = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in M_j$ , con  $v_j \in V_j$  y  $v_k = 0$  para  $k \neq j$ . De aquí  $p(t)m = rt^i(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , donde  $t^i(v_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (v'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  con

$$v'_k = \begin{cases} 0, & k < i \\ a_{k-i \rightarrow k}(v_{k-i}), & k \geq i, \end{cases}$$

Observemos que  $v'_{i+j} = a_{j \rightarrow i+j}(v_j)$  y  $v'_k = 0$ , para  $k \neq i+j$ . Obtenemos entonces que  $p(t)m = (rv'_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  con  $rv'_k = 0$  para  $k \neq i+j$  y  $rv'_{i+j} = r \cdot a_{j \rightarrow i+j}(v_j) \in V_{i+j}$ , por lo tanto  $p(t)m \in M_{i+j}$ , lo que muestra que  $M$  es un módulo graduado, con  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ .

Suponga que  $\{V_i, a_i\}_{i \geq 0}$  es de tipo finito y tomemos  $N \in \mathbb{Z}_0^+$  tal que  $a_i : V_i \rightarrow V_{i+1}$  es un isomorfismo,  $\forall i \geq N$ . Para cada  $i \leq N$  tomemos  $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,d_i}\}$  una base de  $V_i$ ; para  $i > N$  el conjunto

$$\{a_{N \rightarrow i}(v_{N,1}), \dots, a_{N \rightarrow i}(v_{N,d_N})\}$$

es una base para  $V_i$ . Hagamos  $v_{i,k} = a_{N \rightarrow i}(v_{N,k})$  para  $1 \leq k \leq d_i$  y observemos que  $d_i = d_N$  para  $i > N$ .

Definimos

$$u_{i,k}^j = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ v_{i,k}, & j = i \end{cases}$$

y hacemos  $u_{i,k} = (u_{i,k}^j)_{j \in \mathbb{Z}} \in M$ . Afirmamos que el conjunto  $A = \{u_{i,k} \mid 0 \leq i \leq N, 1 \leq k \leq d_i\}$  genera a  $M$ .

Dado  $m = (m_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in M$  tenemos que  $m_i \in V_i, \forall i \geq 0$ , por lo que  $m_i = \sum_{k=1}^{d_i} r_{i,k} v_{i,k}$  con  $r_{i,k} \in \mathbb{F}$ . Por otro lado, dado que  $M$  es una suma directa, solo una cantidad finita de los  $m_i$  son no nulos. Tomamos  $s \in \mathbb{Z}_0^+$  el mayor entero para el cual  $m_i \neq 0$ ; de aquí tenemos

$$\begin{aligned} m &= (m_j)_{j \in \mathbb{Z}} = \sum_{i=0}^s (\delta_{ij} m_j)_{j \in \mathbb{Z}} = \sum_{i=0}^s (\dots 0, m_i, 0 \dots) \\ &= \sum_{i=0}^s \left( \dots 0, \sum_{k=1}^{d_i} r_{i,k} v_{i,k}, 0 \dots \right) = \sum_{i=0}^s \sum_{k=1}^{d_i} r_{i,k} (\dots 0, v_{i,k}, 0 \dots). \end{aligned}$$

En la sumatoria anterior, el sumando  $(\dots 0, v_{i,k}, 0 \dots)$  denota al elemento de  $M$  que tiene a  $v_{i,k}$  en su  $i$ -ésima componente y 0 en las demás, para  $1 \leq i \leq N$  obtenemos que, por definición,  $(\dots 0, v_{i,k}, 0 \dots) = u_{i,k}$ ; para  $i > N$ , tenemos que  $v_{i,k} = a_{N \rightarrow i}(v_{N,k})$ . Por tanto, obtenemos que

$$(\dots 0, v_{i,k}, 0 \dots) = (\dots 0, a_{N \rightarrow i}(v_{N,k}), 0 \dots) = t^i u_{N,k}$$

De aquí que cada elemento de  $M$  puede ser expresado como una combinación  $\mathbb{F}[t]$ -lineal de elementos de  $A$ , y como  $A$  es finito, esto implica que  $M$  es un  $\mathbb{F}[t]$ -módulo finitamente generado.  $\square$

La proposición 3.1 tiene implicaciones más profundas dentro de la teoría pues, de hecho, permite definir una correspondencia entre la

categoría de módulos de persistencia de tipo finito y la categoría de  $\mathbb{F}[t]$ -módulos graduados no negativamente, finitamente generados; una prueba de este resultado puede consultarse en [4].

Dado un módulo graduado  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$  y un entero  $\alpha$ , definimos un módulo graduado

$$M[\alpha] = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (M[\alpha])_i,$$

donde  $(M[\alpha])_i = M_{i+\alpha}, \forall i \in \mathbb{Z}$ .

El siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [8], nos será de gran utilidad más adelante.

**Teorema 3.2.** *Sea  $R$  un dominio de ideales principales (DIP). Todo  $R$ -módulo graduado  $M$  finitamente generado se descompone de manera única como*

$$M \cong \left( \bigoplus_{i=1}^n R[-\alpha_i] \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^m (R/(r_j))[-\gamma_j] \right),$$

donde los  $r_j \in R$  son elementos homogéneos tales que  $r_j | r_{j+1}$  para  $1 \leq j \leq m-1$  y  $\alpha_i, \gamma_j \in \mathbb{Z}$  para  $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$ .

Antes de presentar el teorema principal de esta sección, el teorema estructural 3.4, describiremos el  $\mathbb{F}[t]$ -módulo graduado no negativamente que corresponde a un módulo intervalo  $\{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}$ ; haremos esto a través de la correspondencia definida en la proposición 3.1.

**Proposición 3.3.** *Sea  $M$  el  $\mathbb{F}[t]$ -módulo graduado no negativamente asociado al módulo intervalo  $\{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}, (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ . Entonces  $M$  esta dado como sigue*

$$M \cong \begin{cases} (\mathbb{F}[t]/\langle t^{j-i} \rangle)[-i], & j \in \mathbb{N} \\ (\mathbb{F}[t])[-i], & j = +\infty \end{cases}$$

*Demostración.* Daremos el isomorfismo de manera explícita para cada caso pero omitiremos los detalles debido a que son verificaciones rutinarias.

- Tomemos  $j \in \mathbb{N}$ . Por definición de  $M$  obtenemos que

$$M_k = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ \left( \bigoplus_{l < k} 0 \right) \oplus I_k^{i,j} \oplus \left( \bigoplus_{l > k} 0 \right), & k \geq 0, \end{cases}$$

y por la definición de  $I_k^{i,j}$  obtenemos entonces que

$$M_k = \begin{cases} \left( \bigoplus_{l < k} 0 \right) \oplus \mathbb{F} \oplus \left( \bigoplus_{l > k} 0 \right), & i \leq k < j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado que cada  $m \in M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$  se puede escribir de manera única como  $m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k$  con  $m_k \in M_k$ , los sumandos no nulos  $m_k$  deben tener subíndices  $i \leq k < j$ . Definamos pues  $f : M \rightarrow (\mathbb{F}[t]/\langle t^{j-i} \rangle)[-i]$  dada por

$$f((\delta_{kl}r)_{l \in \mathbb{Z}}) = r(t^{k-i} + \langle t^{j-i} \rangle),$$

para cada  $m \in M$  con  $m = (\delta_{kl}r)_{l \in \mathbb{Z}} \in M_k$ ,  $i \leq k < j$ .

- Para  $j = +\infty$  se tiene que

$$M_k = \begin{cases} \left( \bigoplus_{l < k} 0 \right) \oplus \mathbb{F} \oplus \left( \bigoplus_{l > k} 0 \right), & k \geq i \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

por lo que definimos  $f : M \rightarrow (\mathbb{F}[t])[-i]$

$$f((\delta_{kl}r)_{l \in \mathbb{Z}}) = rt^{k-i}, \quad k \geq i$$

$f$  está bien definida pues cada  $m \in M$  puede ser expresado como  $m = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k$  con  $m_k \in M_k$  y solo una cantidad de los  $m_k$  no nulos, que tienen subíndices  $k \geq i$ , ya que  $M_i = 0$  para  $k < i$ .  $\square$

**Teorema 3.4** (Estructural). *Para cada módulo de persistencia de tipo finito  $V = \{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  existe un conjunto  $\mathbf{Bar}(V_k, a_k)$  de parejas  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , con  $0 \leq i < j \leq +\infty$  y una función  $\mu : \mathbf{Bar}(V_k, a_k) \rightarrow \mathbb{N}$  tal que*

$$\{V_k, a_k\}_{k \geq 0} \cong \bigoplus_{(i,j) \in \mathbf{Bar}(V_k, a_k)} \{I_k^{i,j}, C_k^{i,j}\}_{k \geq 0}^{\mu(i,j)}.$$

*Más aún, esta descomposición es única salvo isomorfismo.*

*Demostración.* Sea  $M$  el  $\mathbb{F}[t]$ -módulo graduado no negativamente, finitamente generado, asociado a  $V$  mediante la proposición 3.1. Dado que

$\mathbb{F}$  es un campo,  $\mathbb{F}[t]$  es un DIP y podemos aplicar el teorema 3.2 para obtener una descomposición como suma directa de  $\mathbb{F}[t]$ -módulos:

$$M \cong \left( \bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{F}[t])[-\alpha_i] \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^m (\mathbb{F}[t]/(t^{m_j}))[-\gamma_j] \right).$$

De la proposición 3.3 vimos que los  $\mathbb{F}[t]$ -módulos graduados no negativamente, finitamente generados, correspondientes a los módulos intervalo  $\{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}$ , tienen justamente la forma de los  $\mathbb{F}[t]$ -módulos graduados que aparecen como sumandos en la suma directa anterior; más aún, dicho isomorfismo de  $\mathbb{F}[t]$ -módulos graduados produce un isomorfismo de módulos de persistencia entre  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  y la suma directa

$$\left( \bigoplus_{i=1}^n \{I_k^{\alpha_i, +\infty}, c_k^{\alpha_i, +\infty}\}_{k \geq 0} \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^m \{I_k^{\alpha_i, \gamma_j + m_j}, c_k^{\gamma_j, \gamma_j + m_j}\}_{k \geq 0} \right)$$

Dado que los enteros  $\alpha_i, \gamma_j, m_j$  no necesariamente son distintos, algunos sumandos pueden aparecer con cierta multiplicidad. Podemos reescribir la descomposición anterior como

$$\{V_k, a_k\}_{k \geq 0} \cong \bigoplus_{(i,j) \in \mathbf{Bar}(V_k, a_k)} \{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}^{\mu(i,j)},$$

donde  $\mathbf{Bar}(V_k, a_k) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  y  $\mu(i, j)$  es la multiplicidad con la cual aparece el módulo intervalo  $\{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}$  en la descomposición.

Finalmente, dado que la descomposición dada por el teorema 3.2 es única, la primera expresión en la descomposición de  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  también es única, obteniendo que la colección  $\mathbf{Bar}(V_k, a_k)$  de parejas  $(i, j)$ , con sus respectivas multiplicidades  $\mu(i, j)$ , es única.  $\square$

En la literatura es común encontrar que los elementos del conjunto  $\mathbf{Bar}(V_k, a_k)$  son interpretados como intervalos cerrados  $[i, j]$ , si  $j < \infty$  o semi-abiertos  $[i, \infty)$ . Esta interpretación de las parejas, junto con sus respectivas multiplicidades  $\mu(i, j) \geq 1$ , da lugar al concepto de **código de barras** del módulo de persistencia  $\{V_k, a_k\}_{k \geq 0}$  asociado. Debido a la unicidad del resultado anterior, los elementos en el código de barras son la información (combinatoria) que determina, salvo isomorfismo, al módulo de persistencia.

La descomposición del *teorema estructural* es de gran relevancia pues permite, entre otras cosas, restringir el análisis de un módulo de persistencia, al análisis de módulos intervalo, los cuales son más sencillos

de estudiar. En este sentido, el *teorema de la estructura* es para los módulos de persistencia de tipo finito lo que el *teorema fundamental de la aritmética* para los números enteros.

Una de las consecuencias más importantes del teorema estructural son los *diagramas de persistencia*, los cuales surgen en el contexto del análisis topológico de datos; específicamente, surgen cuando se estudia el comportamiento de los grupos de homología de un complejo simplicial equipado de una filtración. Estos objetos serán el tema del resto del trabajo.

## 4 Diagramas de persistencia

En esta sección consideraremos homología con coeficientes en un campo  $\mathbb{F}$ . Gran parte de esta sección se basa en el texto [2] de T. K. Dey y Y. Wang.

Dado un complejo simplicial finito  $K$  consideramos una filtración  $\mathbf{FK}$  como una colección de subcomplejos

$$F_0K \subseteq F_1K \subseteq \cdots \subseteq F_{m-1}K \subseteq F_mK = K,$$

donde  $F_0K = \emptyset$ . Para  $0 \leq k \leq m-1$  consideremos las funciones simpliciales inclusión  $g_k : F_kK \rightarrow F_{k+1}K$ , con  $g_k = \text{id}_{F_mK}$  para  $k \geq m$ . Dado  $n \in \mathbb{Z}_0^+$  consideramos las transformaciones lineales inducidas a nivel de homología

$$H_n(g_k) : H_n(F_kK) \rightarrow H_n(F_{k+1}K), \quad 0 \leq k \leq m-1,$$

con  $H_n(g_k) = \text{id}_{H_n(F_mK)}$ ,  $k \geq m$ . Con estos objetos obtenemos el módulo de persistencia  $\{V_k, b_k\}_{k \geq 0}$  dado por

$$V_k = H_n(F_kK), \quad b_k = H_n(g_k),$$

con  $V_k = H_n(F_mK)$  para  $k \geq m$ . Observemos que este módulo de persistencia es de tipo finito y lo llamaremos el **módulo de homología persistente** asociado a la filtración  $\mathbf{FK}$ .

Consideramos la composición  $b_{i \rightarrow j}$  de la sección 2 y la denotamos por  $h_n^{i,j}, \forall i, j \in \mathbb{Z}_0^+, i \leq j$ . Es decir,

$$h_n^{i,j} = H_n(g_{j-1} \circ \cdots \circ g_{i+1} \circ g_i),$$

definida mediante  $h_n^{i,j}([c]_n^i) = [c]_n^j$ , donde  $[c]_n^i$  denota la clase de homología en dimensión  $n$  de la cadena  $c$ , que pertenece al  $i$ -ésimo complejo simplicial en la filtración considerada. De esto se desprende que  $h_n^{i,j}$

manda la clase de homología de  $c$  a su clase de homología en  $H_n(F_j K)$ . Para este módulo de persistencia  $\{V_k, b_k\}_{k \geq 0}$ , denotaremos a sus espacios de homología persistente mediante  $H_n^{i,j}(\mathbf{FK})$ .

Al igual que en la sección 2, decimos que una clase no trivial  $\xi \in H_n(F_a K)$  **nace** en  $F_i K$ , con  $i \leq a$ , si  $\xi \in H_n^{i,a}(\mathbf{FK})$  pero  $\xi \notin H_n^{i-1,a}(\mathbf{FK})$ . Por otro lado, una clase no trivial  $\xi \in H_n(F_a K)$  **muere** al entrar a  $F_j K$ , con  $a < j$ , si  $h_n^{a,j-1}(\xi) \neq 0$ ,  $h_n^{a,j}(\xi) = 0$ .

Una función  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada **monótona por simplejos** si para cualesquiera simplejos  $\sigma', \sigma \in K$  con  $\sigma' \subseteq \sigma$  se tiene que  $f(\sigma') \leq f(\sigma)$ . La siguiente proposición se obtiene directamente de la definición anterior:

**Proposición 4.1.** *Si  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  es una función monótona por simplejos, entonces  $f^{-1}(-\infty, a]$  es un subcomplejo de  $K$  para cada  $a \in \mathbb{R}$ . Además si  $a, b \in \mathbb{R}$  con  $a \leq b$ , entonces  $f(-\infty, a]$  es un subcomplejo de  $f(-\infty, b]$ .*

Debido al resultado anterior, una función monótona por simplejos  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  y números reales  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$  tales que  $a_m \geq \max\{f(\sigma) : \sigma \in K\}$ ,  $a_0 < \min\{f(\sigma) : \sigma \in K\}$ , inducen una filtración de  $K$ :

$$\mathbf{FK} : \quad \emptyset = F_{a_0} K \subseteq F_{a_1} K \subseteq \dots \subseteq F_{a_m} K = K,$$

donde  $F_{a_i} K = f^{-1}(-\infty, a_i]$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ . En este contexto decimos que la filtración  $\mathbf{FK}$  es **inducida** por  $f$ .

Consideremos el plano extendido  $\overline{\mathbb{R}}^2 = (\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})^2$  y tomemos  $1 \leq k \leq m$ . Para un generador  $[c]_n^k \in H_n(F_{a_k} K)$  que nace en  $F_{a_i} K$  y muere en  $F_{a_j} K$ , consideramos el punto  $(a_i, a_j)$  y lo graficamos en el plano  $\overline{\mathbb{R}}^2$ ; en caso de que la clase dada no muera, graficamos el punto  $(a_i, +\infty)$ .

Cada punto  $(a_i, a_j)$  se grafica con multiplicidad

$$\mu_n^{i,j} = (\beta_n^{i,j-1} - \beta_n^{i,j}) - (\beta_n^{i-1,j-1} - \beta_n^{i-1,j}),$$

donde  $\beta_n^{l,s}$  son los números de Betti persistentes del módulo de persistencia que involucra a los espacios de homología de dimensión  $n$  de los complejos simpliciales de la filtración  $\mathbf{FK}$ . La primera diferencia del lado derecho cuenta el número de clases linealmente independientes que nacen en, o antes de  $F_i K$ , y mueren al entrar a  $F_j K$ ; por otra parte, la segunda diferencia cuenta el número de clases linealmente independientes que nacen en, o antes de  $F_{i-1} K$ , y mueren al entrar a  $F_j K$ .

Con esto,  $\mu_n^{i,j}$  cuenta el número de clases linealmente independientes que nacen en  $F_iK$  y mueren al entrar a  $F_jK$ .

Por otra parte, los puntos de la forma  $(a_i, +\infty)$  se grafican con multiplicidad  $\mu_n^{i,+\infty} = \beta_n^{i,m} - \beta_n^{i-1,m}$ , donde  $\beta_n^{i,m}$  cuenta el número de clases que nacen en, o antes de  $F_iK$ , y no mueren;  $\beta_n^{i-1,m}$  cuenta el número de clases que nacen en, o antes de  $F_{i-1}K$ , y no mueren. Luego, en este caso,  $\mu_n^{i,+\infty}$  cuenta el número de clases que nacen en  $F_iK$  y no mueren.

El **diagrama de persistencia** de la filtración  $\mathbf{FK}$  inducida por  $f$  consiste del conjunto de puntos  $(a_i, a_j), (a_i, +\infty)$ , con multiplicidades  $\mu_n^{i,j}, \mu_n^{i,+\infty}$ , graficados en el plano extendido  $\overline{\mathbb{R}^2}$ ; véase la figura 4.1, donde los puntos de la diagonal del plano extendido se grafican con multiplicidad infinita.

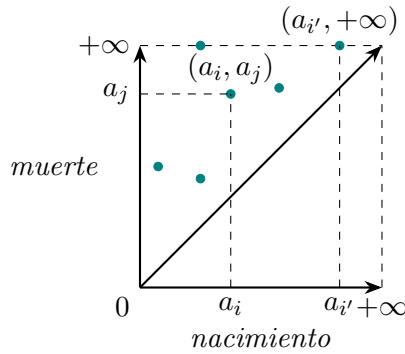


Figure 4.1: En un diagrama de persistencia todos los puntos graficados se encuentran por encima de la diagonal.

Como se mencionó anteriormente, los diagramas de persistencia son consecuencia directa del teorema estructural. En lo que resta de la sección mostraremos la relación que guardan el diagrama de persistencia y el código de barras asociado al módulo de homología persistente de la filtración  $\mathbf{FK}$ . Haremos un análisis tomando en cuenta la multiplicidad de las clases; sugerimos consultar [7] para mayores detalles de lo que a continuación se expone.

Analicemos el caso de puntos con multiplicidad  $\mu_n^{i,j}$ . Dado el punto  $(a_i, a_j)$  con multiplicidad  $\mu_n^{i,j}$  se tienen  $\mu_n^{i,j}$  clases linealmente independientes que nacen en  $F_{a_i}K$  y mueren al entrar a  $F_{a_j}K$ . Para cada clase  $[c]_n^i \in H_n(F_{a_i}K)$  tomamos el submódulo  $\{V'_k, b'_k\}_{k \geq 0}$  definido por

$$V'_k = \begin{cases} (h_n^{a_k, a_i})^{-1}(\langle [c]_n^i \rangle), & k < i \\ h_n^{a_i, a_k}(\langle [c]_n^i \rangle), & k \geq i \end{cases}$$

donde  $\langle [c]_n^i \rangle$  denota al submódulo de  $H_n(F_{a_i}K)$  generado por  $[c]_n^i$ , y cada transformación lineal  $b'_k : V'_k \rightarrow V'_{k+1}$  es la restricción de  $b_k = h_n^{a_k, a_{k+1}}$  a  $V'_k$ .

Veremos que los módulos  $V'_k$  pueden ser descritos de una manera más sencilla. Para  $k < i$  se tiene que  $(h_n^{a_k, a_i})^{-1}(\langle [c]_n^i \rangle) = 0$ , ya que  $[c]_n^i$  nace en  $F_{a_i}K$ , luego la clase de homología de  $c$  no aparece antes de  $F_{a_i}K$  en la filtración. Por otro lado,

$$h_n^{a_i, a_k}(\langle [c]_n^i \rangle) = \langle [c]_n^k \rangle$$

para todo  $k \geq i$ . Dado que  $[c]_n^i$  muere al entrar a  $F_{a_j}K$ , entonces por un lado  $h_n^{a_i, a_{j-1}}([c]_n^i) \neq 0$  de donde

$$[c]_n^k = h_n^{a_i, a_k}([c]_n^i) \neq 0$$

para  $i \leq k \leq j-1$ ; por otro lado  $h_n^{a_i, a_j}([c]_n^i) = 0$  y por ello

$$[c]_n^k = h_n^{a_i, a_k}([c]_n^i) = 0$$

para  $k \geq j$ . Lo anterior implica que  $h_n^{a_i, a_k}(\langle [c]_n^i \rangle) \cong \mathbb{F}$  para  $i \leq k \leq j-1$  y  $h_n^{a_i, a_k}(\langle [c]_n^i \rangle) = 0$  para  $k \geq j$ .

De lo anterior obtenemos que

$$V'_k \cong \begin{cases} \mathbb{F}, & i \leq k \leq j-1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para describir las transformaciones  $b'_k$  recordemos que  $b'_k : V'_k \rightarrow V'_{k+1}$  es la restricción de  $b_k = h_n^{a_k, a_{k+1}}$  a  $V'_k$ . De esto tenemos lo siguiente:

- Para  $k < i$ , tenemos que  $V'_k = 0$ , luego  $b'_k = 0$ .
- Para  $i \leq k < j-1$ , tenemos que  $V'_k$  es generado por  $[c]_n^k \neq 0$  y  $V'_{k+1}$  es generado por  $[c]_n^{k+1} \neq 0$  y  $b'_k([c]_n^k) = [c]_n^{k+1}$ . Es decir  $b'_k$  envía el generador de  $V'_k$  al generador de  $V'_{k+1}$ .
- Para  $k \geq j-1$  se tiene que  $V'_{k+1} = 0$ , y por ello  $b'_k = 0$ .

Del análisis hecho a los módulos  $V'_k$  y las transformaciones  $b_k$  podemos observar que existe un isomorfismo  $f$  entre  $\{V'_k, b'_k\}_{k \geq 0}$  y el módulo intervalo  $\{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}$ , dado por

$$f_k(r \cdot [c]_n^k) = r \in \mathbb{F}$$

siempre que  $i \leq k \leq j - 1$ , y  $f_k = 0$  en otro caso.

Tomemos ahora el caso de los puntos con multiplicidad  $\mu_n^{i,+\infty}$ . Para cada punto  $(a_i, +\infty)$  que se grafica en el diagrama de persistencia con multiplicidad  $\mu_n^{i,+\infty}$  hay  $\mu_n^{i,+\infty}$  clases linealmente independientes que nacen en  $F_{a_i}K$  y nunca mueren. Siguiendo un razonamiento similar al que se hizo anteriormente, para cada una de estas clases  $[c]_n^i \in H_n(F_{a_i}K)$  definimos un submódulo  $\{V'_k, b'_k\}_{k \geq 0}$  de  $\{V_k, b_k\}_{k \geq 0}$  definido de la misma manera que antes. En este caso llegamos a que

$$V'_k = \begin{cases} \langle [c]_n^k \rangle \cong \mathbb{F}, & k \geq i \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De lo anterior se obtiene que  $\{V'_k, b'_k\}_{k \geq 0}$  es isomorfo al módulo intervalo  $\{I_k^{i,+\infty}, c_k^{i,+\infty}\}_{k \geq 0}$ ; véase [7] para mayores detalles.

En cualquiera de los casos anteriores, al igual que en el teorema 3.4, hemos llegado a ciertos módulos intervalo  $\{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}$ . Más aun, de acuerdo a dicho teorema, el módulo de homología persistente  $\{V_k, b_k\}_{k \geq 0}$  de la filtración  $\mathbf{F}K$  se puede descomponer como

$$\{V_k, b_k\}_{k \geq 0} \cong \bigoplus_{(i,j) \in \mathbf{Bar}(V_k, b_k)} \{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}^{\mu(i,j)},$$

Esto es, se descompone como suma directa de módulos intervalo de la forma  $\{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}$  (con  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ), donde cada módulo intervalo aparece con multiplicidad  $\mu(i, j)$ . De esto se sigue que los puntos  $(a_i, a_j)$  del diagrama de persistencia, con multiplicidad  $\mu_k^{i,j}$  se corresponden con factores  $\{I_k^{i,j}, c_k^{i,j}\}_{k \geq 0}$  en la descomposición anterior, que aparecen con la misma multiplicidad  $\mu(i, j)$ .

Cerramos esta sección mencionando que los diagramas de persistencia son un método visual que ayuda a codificar la información obtenida del análisis homológico de la filtración de un complejo simplicial. Más aun, la unicidad en el teorema estructural (3.4) es lo que nos asegura que estos diagramas de persistencia son únicos para cada filtración.

## 5 Un cálculo explícito

Consideremos la filtración de la figura 5.1 con  $F_0K = \emptyset \subseteq F_1K$ .

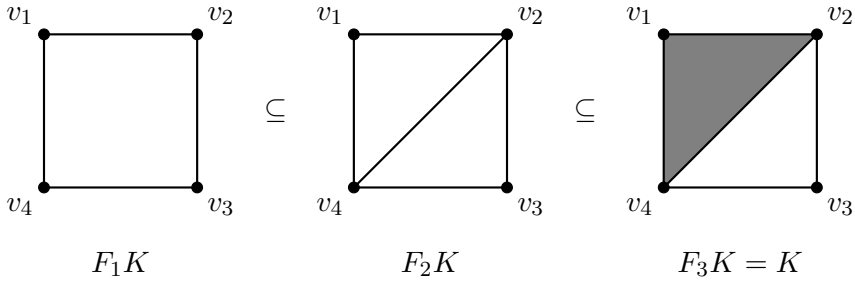


Figure 5.1: Filtración asociada a un complejo simplicial

Consideremos los 1-ciclos en  $K$

$$c_1 = v_1v_2 + v_2v_3 + v_3v_4 - v_1v_4, \quad c_2 = v_1v_2 + v_2v_4 - v_1v_4,$$

$$c_3 = v_2v_3 + v_3v_4 - v_2v_4$$

En lo que sigue haremos un análisis de la homología de la filtración.

- Notemos que  $H_1^{0,j}(\mathbf{FK}) = 0$  para  $j \in \{1, 2, 3\}$ .
- Para  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  se tiene que  $H_1^{i,i}(\mathbf{FK}) = H_1(F_iK)$ , por lo que obtenemos

$$H_1^{0,0}(\mathbf{FK}) = 0,$$

$$H_1^{1,1}(\mathbf{FK}) = \langle [c_1]_1^1 \rangle,$$

$$H_1^{2,2}(\mathbf{FK}) = \langle [c_2]_1^2, [c_3]_1^2 \rangle \text{ y}$$

$$H_1^{3,3}(\mathbf{FK}) = \langle [c_3]_1^3 \rangle.$$

- $H_1^{1,2}(\mathbf{FK}) = h_1^{1,2}(F_1K) = h_1^{1,2}(\langle [c_1]_1^1 \rangle) = \langle [c_1]_1^2 \rangle$
- $H_1^{1,3}(\mathbf{FK}) = h_1^{1,3}(F_1K) = h_1^{1,3}(\langle [c_1]_1^1 \rangle) = \langle [c_1]_1^3 \rangle = \langle [c_3]_1^3 \rangle$ , donde la última igualdad se debe a que  $[c_1]_1^3 = [c_3]_1^3$ , por ser  $c_1 - c_3 = c_2 \in B_1(F_3K)$ .
- $H_1^{2,3}(\mathbf{FK}) = h_1^{2,3}(F_2K) = h_1^{2,3}(\langle [c_2]_1^2, [c_3]_1^2 \rangle) = \langle [c_3]_1^3 \rangle$ , donde la última igualdad se debe a que  $h_1^{2,3}(\langle [c_2]_1^2 \rangle) = 0$ .

Con la información anterior obtenemos los números de Betti persistentes  $\beta_1^{i,j}$ , para  $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ ; además, con dichos números, calculamos los valores de la función de emparejamiento de persistencia  $\mu_1^{i,j}$ . Esta información está contenida en las siguientes tablas

i j \	0	1	2	3
0	0	-	-	-
1	0	1	-	-
2	0	1	2	-
3	0	1	1	1

i j \	1	2	3
1	-	-	-
2	0	-	-
3	0	1	-
$+\infty$	1	0	0

La tabla a la derecha muestra que existe 1 clase independiente que nace en  $F_2K$  y muere al entrar a  $F_3K$ ; de igual forma existe 1 clase independiente que nace en  $F_1K$  y nunca muere. Para localizar estas clases, tomaremos las bases para  $H_1(F_iK) = H_1^{i,i}(\mathbf{F}K)$  dadas previamente para  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Notemos que el generador  $[c_1]_1^1 \in H_1(F_1K)$  nace en  $F_1K$ , y nunca muere ya que

$$h_1^{1,3}([c_1]_1^1) = [c_1]_1^3 \neq 0.$$

Así, el elemento  $[c_1]_1^1$  es una de las clases buscadas.

Dado que  $\{[c_2]_1^2, [c_3]_1^2\}$  es una base para  $H_1(F_2K)$ , la otra clase que se busca es de la forma

$$[c]_1^2 = r_2[c_2]_1^2 + r_3[c_3]_1^2.$$

Si ocurriera que  $r_3 \neq 0$ , entonces

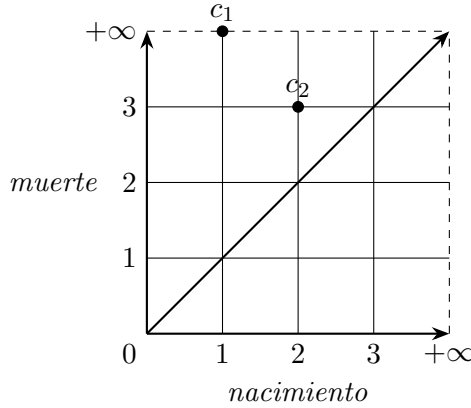
$$\begin{aligned} h_1^{2,3}(r_2[c_2]_1^2 + r_3[c_3]_1^2) &= r_2 \cdot h_1^{2,3}([c_2]_1^2) + r_3 \cdot h_1^{2,3}([c_3]_1^2) \\ &= r_2 \cdot [c_2]_1^3 + r_3 \cdot [c_3]_1^3 \\ &= r_2 \cdot 0 + r_3 \cdot [c_3]_1^3 \\ &= r_3 \cdot [c_3]_1^3 \neq 0, \end{aligned}$$

por lo que  $[c]_1^2$  no muere al entrar a  $F_3K$ , lo cual no puede ser. De esto se sigue que la clase que buscamos es de la forma  $r_2[c_2]_1^2$ . En particular, tomemos  $[c_2]_1^2$  y notemos que esta clase nace en  $F_2K$  y muere al entrar a  $F_3K$  puesto que

$$h_1^{2,2}([c_2]_1^2) = [c_2]_1^2 \neq 0$$

con  $h_1^{2,3}([c_2]_1^2) = [c_2]_1^3 = 0$ .

De lo analizado arriba se obtiene el siguiente diagrama de persistencia en el cual las clases  $c_1$  y  $c_2$  se grafican con multiplicidad 1



### Agradecimientos

Los autores agradecen al revisor por sus valiosos comentarios.

Miguel Maldonado  
*Unidad Académica de Matemáticas,*  
 Universidad Autónoma de Zacatecas,  
 Calzada Solidaridad S/N,  
 Zacatecas, México  
 mmaldonado@uaz.edu.mx

Óscar Robles  
*Unidad Académica de Matemáticas,*  
 Universidad Autónoma de Zacatecas,  
 Calzada Solidaridad S/N,  
 Zacatecas, México  
 germanroot\_tower@outlook.es

Claudia Andrea Vidales-Basurto  
 Centro de Investigación en  
 Matemáticas A.C.,  
 Jalisco S/N, Col. Valenciana, C.P.  
 36023,  
 Guanajuato, Gto. México,  
 claudia.vidales@cimat.mx

### Referencias

- [1] Chazal, F., de Silva, V., Glisse, M., Oudot, S., *The Structure and Stability of Persistence Modules*, Springer Briefs in Mathematics, 2016.

- [2] Dey, T. K., Wang, Y., Computational topology for data analysis, Cambridge University Press (2022).
- [3] Edelsbrunner, H., D. Letscher, A. Zomorodian, *Topological Persistence and Simplification*, Discrete Comput Geom **28**, 511-533, 2002.
- [4] Eisenbud, D., Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Theory, Springer (1995).
- [5] Marley, T., Graded Rings and Modules, University of Nebraska-Lincoln (1993), <https://math.unl.edu/faculty/Marley/905notes.pdf>
- [6] Nanda, V., Computational Algebraic Topology, Lecture Notes (2020), <https://people.maths.ox.ac.uk/nanda/cat/>
- [7] Robles, O., *Homología Persistente una Introducción al Análisis Topológico de Datos*, Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma de Zacatecas, 2024.
- [8] Zomorodian, A., Carlsson, G., Computing Persistent Homology. Discrete and Computational Geometry (2005), 249–274. <https://doi.org/10.1007/s00454-004-1146-y>