Morfismos, Vol. 27, No. 2, 2023, pp. 23–46

La clasificación de grupos algebraicos afines

Graciela Reyes-Ahumada   Juan Vásquez Aquino
Kenia Zarate Badillo

Resumen

En este artículo panorámico introducimos las primeras nociones del diccionario álgebra-geometría y presentamos una demostración autocontenida de la clasificación de grupos algebraicos afines, este resultado es uno de los más importantes teoremas dentro del área de investigación llamada *Teoría de Invariantes Geométricos (GIT).* Este artículo es una adaptación de la tesis [13].

2010 Mathematics Subject Classification: 14R05 Classification of affine varieties, 14R20 Group actions on affine varieties, 14L24 Geometric invariant theory
Keywords and phrases: Variedades afines, diccionario álgebra-geometría, grupos algebraicos afines.

1 Introducción

La geometría algebraica es una de las ramas más fascinantes y profundas de las matemáticas que conecta estructuras geométricas con algebraicas a través de las variedades y sus anillos de funciones regulares, también llamados anillos de coordenadas. Esta relación permite estudiar objetos geométricos utilizando herramientas del álgebra conmutativa, un enfoque que ha llevado a numerosos avances tanto en teoría como en aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas puras. En este artículo, exploramos un concepto clave en esta área, los grupos algebraicos afines

[1]Este trabajo es parte de la tesis de licenciatura de la tercera autora bajo la supervisión de los primeros dos autores en la Universidad Autónoma de Zacatecas. La tesis fue presentada en agosto de 2023.

sobre un campo K algebraicamente cerrado, los cuales combinan la estructura algebraica de un grupo con la estructura geométrica de una variedad afín. Esta combinación permite describir las propiedades de estos grupos mediante diagramas conmutativos que relacionan variedades afines y K-álgebras asociadas a sus anillos de coordenadas. Nos centraremos en la importancia de estos diagramas y cómo nos permiten entender las operaciones algebraicas dentro de un contexto geométrico, haciendo uso de lo que llamamos *diccionario álgebra-geometría*.

El objetivo principal de este escrito es mostrar que todo grupo algebraico afín es isomorfo a un subgrupo cerrado del grupo de matrices invertibles $GL_n(K)$, es decir, que todo grupo algebraico afín es lineal. Para llegar a este resultado, utilizamos las nociones de acciones de grupos algebraicos afines en variedades afines, así como la acción inducida en el anillo de coordenadas de la variedad, lo cual es crucial para establecer la conexión entre los grupos algebraicos y el grupo $GL_n(K)$.

Este artículo está estructurado de la siguiente manera: primero revisamos los conceptos esenciales de geometría algebraica donde presentamos el diccionario álgebra-geometría, luego introducimos la noción de grupo algebraico afín y estudiamos sus propiedades fundamentales, utilizando el lenguaje de diagramas conmutativos. Finalmente, ofrecemos una demostración detallada del teorema principal, utilizando las acciones de grupos en variedades y la acción inducida en las K-álgebras finitamente generadas.

2 Álgebras finitamente generadas

En esta sección introducimos los preliminares de álgebra necesarios para definir el diccionario álgebra-geometría. Estamos particularmente interesados en estudiar ciertos anillos especiales, llamados K-álgebras.

A lo largo de estas notas trabajamos sobre un campo algebraicamente cerrado, es decir, que satisface un análogo del teorema fundamental del álgebra.

Definición 2.0.1 *Un campo K es algebraicamente cerrado si para todo polinomio no constante con coeficientes en K, $f(x) \in K[x]$, existe $p \in K$ tal que $f(p) = 0$.*

Ejemplo 2.1 $\mathbb{C}$ *es un campo algebraicamente cerrado.*

De aquí en más K denotará a un campo algebraicamente cerrado y $K[x_1, ..., x_n]$ denotará al anillo de polinomios en n variables con coeficientes en K.

Definición 2.2 *Una K-álgebra finitamente generada (f.g.) es un anillo isomorfo a*

$$K[x_1, ..., x_n]/I,$$

para algún $n \in \mathbb{N}$ y algún ideal $I \subset K[x_1, ..., x_n]$

Ejemplo 2.3

1. *$\mathbb{C}[x]$ es una $\mathbb{C}$-álgebra f.g., en general $K[x_1, ..., x_n]$ es una K-álgebra para todo $n \in \mathbb{N}$, considerando al ideal cero $I = \{0\}$ como el ideal que la define.*

2. *$\mathbb{C}$ es una $\mathbb{C}$-álgebra f.g. ya que*

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{C}[x]/\langle x \rangle.$$

Definición 2.4 *Sean R y S dos K-álgebras finitamente generadas con respectivos isomorfismos*

$$\alpha : K[x_1, ..., x_n]/I \cong R \text{ y } \beta : K[y_1, ..., y_m]/J \cong S.$$

Un morfismo de anillos $\phi : R \to S$ es llamado morfismo de K-álgebras si hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "i"] & \\
K[x_1, ..., x_n]/I \arrow[d, "\alpha"'] & & K[y_1, ..., y_m]/J \arrow[d, "\beta"] \\
R \arrow[rr, "\phi"] & & S
\end{tikzcd}$$

donde i denota a la inclusión de las constantes.

Notemos que en esencia un morfismo de K-álgebras es un morfismo de anillos que deja fijas a los polinomios constantes.

Ejemplo 2.5

1. *Sea $p \in \mathbb{C}^n$ un punto. La función evaluar en el punto p,*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] &\to \mathbb{C} \\ f(x_1, ..., x_n) &\mapsto f(p) \end{aligned}$$

es morfismo de $\mathbb{C}$-álgebras.

Definición 2.6 *Un elemento a en un anillo R es llamado nilpotente si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a^m = 0$. Una K-álgebra es llamada reducida si no tiene elementos nilpotentes no cero.*

Ejemplo 2.7

1. *El elemento cero del anillo siempre es nilpotente.*
2. *Las K-álgebras $K, K[x], K[x_1, ...x_n]$ son reducidas, ya que estos son dominios enteros y su único nilpotente es el cero.*
3. *$R = K[x]/\langle x^2 \rangle$ no es reducida, ya que la clase $x + \langle x^2 \rangle \in R$ es nilpotente.*

Definición 2.8 *Sea R una K-álgebra f.g. Decimos que un conjunto de elementos $\{f_j\}_{j\in J} \subset R$ son generadores de R (como K-álgebra), si R es el anillo generado por las constantes y las f_j's. Más formalmente, sea $\alpha : K[x_1, ..., x_n]/I \cong R$ el respectivo isomorfismo, entonces*

$$R = \langle \alpha(K), \{f_j\}_{j\in J} \rangle.$$

En este caso se denota como

$$R = K[\{f_j\}_{j\in J}],$$

el que los f_j's generan a R como K-álgebra.

Ejemplo 2.9

1. *$\{x, y\}$ son generadores de $\mathbb{C}[x, y]$. Al igual que el conjunto $\{x + y, x - y\}$ genera a $\mathbb{C}[x, y]$, es decir,*

$$\mathbb{C}[x, y] = \mathbb{C}[x + y, x - y].$$

2. *Si $R = K[x_1, ..., x_n]/I$ entonces las x_j's son generadores, es decir, si $\overline{x_j} = x_j + I$ denota a la clase, entonces*

$$R = K[\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n}].$$

En particular, toda K-álgebra f.g. tiene siempre un conjunto finito de generadores.

Por simplicidad, por el resto del escrito abusaremos de la notación y consideramos que las K-álgebras f.g. son precisamente

$$R = K[x_1, ..., x_n]/I$$

usando igualdad en vez de isomorfismo.

3 Variedades afines

Ahora introducimos los objetos geométricos que nos interesa estudiar, que es el primer ejemplo de variedad algebraica: las variedades afines.

Definición 3.1 *Sea $I \subset K[x_1, .., x_n]$ un ideal. Definimos el conjunto de ceros de I como*

$$\mathcal{V}(I) = \{p \in K^n | f(p) = 0 \text{ para todo } f \in I\}.$$

Ejemplo 3.2

1. *Los ceros del ideal cero $I = \langle 0 \rangle$ en $\mathbb{C}^n$, es todo $\mathbb{C}^n$.*
2. *Los ceros de $I = \langle y - x^2 \rangle$ en $\mathbb{C}^2$ forman una parábola.*
3. *Si $f \in K[x]$ es un polinomio no constante entonces su ideal generado es $\langle f \rangle = \{\lambda f | \lambda \in K[x]\}$, por lo que*

   $$\mathcal{V}(\langle f \rangle) \neq \emptyset,$$

   ya que K es algebraicamente cerrado y este conjunto consiste de las raíces de f.

Definición 3.3 *Sea $X = \mathcal{V}(I) \subset K^n$ el conjunto de ceros de I. El anillo coordenado de X es la K-álgebra f.g.*

$$\mathcal{O}(X) = K[x_1, \ldots, x_n]/I.$$

Ejemplo 3.4

1. *El anillo coordenado de $X = \mathcal{V}(\langle y - x^2 \rangle) \subset \mathbb{C}^2$ es*

   $$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x, y]/\langle y - x^2 \rangle \cong \mathbb{C}[x].$$

2. *El anillo coordenado de $X = \mathbb{C}^n$ es*

   $$\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]/\langle 0 \rangle \cong \mathbb{C}[x_1, ..., x_n].$$

Definición 3.5 *Una variedad afín es un conjunto de ceros*

$$X = \mathcal{V}(I),$$

para algún un ideal I, tal que su anillo coordenado

$$\mathcal{O}(X) = K[x_1, ..., x_n]/I,$$

es una K-álgebra reducida.

Ejemplo 3.6 *1.* $\mathcal{V}(\langle y - x^2 \rangle) \subset \mathbb{C}^2$ *es variedad afín, ya que* $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}[x]$ *es un dominio entero, por lo que no tiene nilpotentes no cero.*

2. $\mathbb{C}^n$ *es variedad afín, ya que* $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ *es dominio entero.*

3. El conjunto de matrices cuadradas, $M_n(K) = \mathcal{V}(\langle 0 \rangle) = K^{n^2}$ *es una variedad afín con*

$$\mathcal{O}(M_n(K)) = K[x_{ij}], \ i, j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Teorema 3.7 (Topología de Zariski) *La colección de subconjuntos* $\{\mathcal{V}(I) \mid I \text{ es ideal}\}$ *define una topología en* K^n *considerando a los* $\mathcal{V}(I)$ *como subconjuntos cerrados. Ésta es llamada la topología de Zariski y es denotada por* $\mathbb{A}^n_K$*, para diferenciarla de la topología euclidiana.*

Demostración. Claramente $\mathcal{V}(1) = \emptyset$ y $K^n = \mathcal{V}(\langle 0 \rangle)$. Si I, J son ideales de $K[x_1, ..., x_n]$ entonces

$$\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J).$$

Además para cualquier familia de ideales $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se tiene que

$$\cap_{a \in A} \mathcal{V}(I_\alpha) = \mathcal{V}\left(\sum_{a \in A} I_\alpha\right).$$

□

Notemos que si $X \subset \mathbb{A}^n_K$ es una variedad afín entonces podemos dotarla con una estructura de espacio topológico al considerar la topología inducida (de Zariski). Una subvariedad (cerrada) de X será un cerrado en la topología inducida.

Ejemplo 3.8 *1. Las matrices invertibles* $GL_n(K)$ *son un abierto en* $M_n(K)$ *ya que si consideramos* $det := det(x_{11}, ..., x_{nn})$ *como el polinomio determinante, entonces su complemento es*

$$GL_n(K) = \mathcal{V}(\langle det \rangle)^c \subset K^{n^2}.$$

Por otro lado, considerando el polinomio $(det)y - 1 \in K[x_{ij}, y]$ *podemos ver a* $GL_n(K)$ *como una subvariedad en* K^{n^2+1}*,*

$$GL_n(K) = \mathcal{V}(\langle (det)y - 1 \rangle) \subset K^{n^2+1}.$$

Además,

$$\mathcal{O}(GL_n(K)) = \frac{K[x_{11}, ..., x_{nn}, y]}{\langle (det)y - 1 \rangle} \cong K[x_{11}, ..., x_{nn}, 1/det].$$

2. *Similarmente* $K^* = K - \{0\}$ *es una variedad afín y* $\mathcal{O}(K^*) = K[x,y]/\langle xy-1\rangle \cong K[x,x^{-1}]$.

Proposición 3.9 (Producto afín) *Sean* X, Y *dos variedades afines, entonces* $X \times Y$ *es nuevamente una variedad afín. Además*

$$\mathcal{O}(X \times Y) \cong \mathcal{O}(X) \otimes_K \mathcal{O}(Y).$$

Demostración. Si $\mathcal{O}(X) = K[x_1, \ldots, x_n]/I$ y $\mathcal{O}(Y) = K[y_1, \ldots, y_m]/J$ son los respectivos anillos coordenados, entonces

$$X \times Y = \mathcal{V}(I + J) \subset K^{n+m}.$$

Por lo que su anillo coordenado es

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(X \times Y) &= K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_m]/I + J \\ &\cong K[x_1, \ldots, x_n]/I \otimes K[y_1, \ldots, y_m]/J \\ &= \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y).\end{aligned}$$

Ver [1, pág.24], [12, pág. 26]. □

Definición 3.10 *Sean* $X \subset K^n$ *y* $Y \subset K^m$ *variedades afines. Un morfismo de variedades afines es una función* $f : X \to Y$ *tal que existen elementos* $f_1, ..., f_m$ *en* $\mathcal{O}(X)$ *que satisfacen,*

$$f(p) = (f_1(p), ..., f_m(p)), \ \forall p \in X,$$

Ejemplo 3.11

1. $M_n(K) \times M_n(K)$ *es la variedad afín dada por* $\mathcal{V}(0) = K^{2n^2}$ *con* $\mathcal{O}(M_n(K) \times M_n(K)) \cong K[\{x_{ij}\}, \{y_{ij}\}]$. *Entonces la multiplicación de matrices*

$$\begin{aligned}M_n(K) \times M_n(K) &\to M_n(K) \\ (A, B) &\mapsto AB\end{aligned}$$

es un morfismo de variedades afines, ya que es polinomial en cada entrada.

2. *La inversa de matrices es también un morfismo de variedades afines*

$$\begin{aligned}GL_n(K) &\to GL_n(K) \\ A &\mapsto A^{-1}.\end{aligned}$$

Nota 3.12 *1. Notemos que todo elemento en $f \in \mathcal{O}(X)$ define un morfismo de variedades afines*

$$\begin{aligned} f : X &\to K \\ p &\mapsto f(p). \end{aligned}$$

2. La composición de morfismos de variedades afines es nuevamente un morfismo de variedades afines.

4 El diccionario álgebra-geometría

En esta sección introducimos el diccionario entre Álgebra y Geometría, que es uno de los principales objetos de estudio del área de investigación conocida como *Geometría Algebraica*. En la sección 2 de este escrito hemos estudiado a las K-álgebras f.g. y sus morfismos, y en la sección anterior estudiamos a las variedades afines y sus morfismos. De hecho dada una variedad afín $X = \mathcal{V}(I) \subset K^n$ podemos asignarle la K-álgebra dada por su anillo de funciones regulares $\mathcal{O}(X)$. Por otro lado, un morfismo afín induce también un morfismo de K-álgebras. Para esta sección se recomienda al lector consultar [3] y [5].

Proposición 4.1 *Sean $X \subset K^n$ y $Y \subset K^m$ variedades afines, y $\phi : X \to Y$ un morfismo de variedades afines. Entonces la siguiente función es un morfismo de K-álgebras*

$$\begin{aligned} \phi^* : \mathcal{O}(Y) &\to \mathcal{O}(X) \\ g &\mapsto \phi \circ g. \end{aligned}$$

Demostración. Para $g, h \in \mathcal{O}(Y)$, $p \in Y$, se satisface que

$$\phi^*(g+h)(p) = (\phi \circ g)(p) + (\phi \circ h)(p) = \phi^*(g)(p) + \phi^*(h)(p),$$

$$\phi^*(gh)(p) = (\phi \circ g)(p)(\phi \circ h)(p) = \phi^*(g)(p)\phi^*(h)(p),$$

por lo que es morfismo de anillos. Además si $c \in K$

$$\phi^*(c)(p) = c,$$

es decir, deja fijas a las constantes. □

Ahora vamos a ponernos categóricos por un momento: recordemos que una categoría $\mathcal{C}$ es una colección de objetos y morfismos (flechas), que satistace que

- si X es un objeto en $\mathcal{C}$, existe la flecha identidad $1 : X \to X$
- si $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ son flechas en $\mathcal{C}$, entonces la composición $g \circ f : X \to Z$ es nuevamente una flecha en $\mathcal{C}$.

El lector seguramente está familiarizado con muchos ejemplos de categorías, como:

1. La categoría de espacios topológicos **Top**: los objetos son espacios topológicos y las flechas son las funciones continuas.
2. La categoría de K-álgebras finitamente generadas reducidas **Kalg**: los objetos son K-álgebras f.g., reducidas, que se ven como cocientes $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ donde I ideal, sin elementos nilpotentes, y las flechas son precisamente los morfismos de K-álgebras.
3. La categoría de variedades afines **Afin**: sus objetos son las variedades afines y sus flechas son los morfismos de variedades afines.

En lenguaje de categorías la asignación dada por $\mathcal{O}$,

$$\begin{array}{llcr} & \mathbf{Afin} & \longrightarrow & \mathbf{Kalg} \\ \\ \text{objetos:} & X & \longmapsto & \mathcal{O}(X) \\ \\ \text{flechas:} & X \xrightarrow{\varphi} Y & \longmapsto & \mathcal{O}(X) \xleftarrow{\varphi^*} \mathcal{O}(Y) \end{array}$$

es un funtor contravariante (invierte la dirección de las flechas). El lector interesado en profundizar en el tema de categorías puede consultar [6]. Se puede demostrar que además existe otro funtor que es inverso a $\mathcal{O}$ [3, Cap. 4], es decir,

Teorema 4.2 (El diccionario álgebra-geometría) *La asignación $\mathcal{O}$ es una equivalencia categórica.*

Esencialmente esta equivalencia de categorías nos dice que existe un diccionario entre variedades afines y K-álgebras, y que toda propiedad o pregunta que exista en variedades tendrá un análogo en el lenguaje de K-álgebras y viceversa. Dado que la asignación $\mathcal{O}$ invierte la dirección de las flechas, tenemos que,

Corolario 4.3 *Si $i : Y \hookrightarrow X$ es una subvariedad, entonces existe un morfismo de anillos sobreyectivo*

$$i^* : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y).$$

Demostración. Sean $X = \mathcal{V}(I)$ y $Y = \mathcal{V}(J)$, como $Y \subset X$ entonces $I \subset J$, y

$$K[x_1, \ldots, x_n]/I \to K[x_1, \ldots, x_n]/J,$$

es la proyección al cociente, la cual es sobreyectiva. □

En general, se puede demostrar que,

Corolario 4.4 *Sea $\phi : Y \to X$ un morfismo afín inyectivo, entonces $\phi^* : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ es sobreyectivo.*

Y conversamente,

Corolario 4.5 *[11, Teorema 4.88] Si $\phi^* : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(Y)$ es un morfismo sobreyectivo de K-álgebras, entonces $\phi : Y \to X$ es inyectivo y su imagen es una subvariedad de X.*

Corolario 4.6 *Un diagrama conmutativo de variedades afines induce un diagrama conmutativo de anillos de la forma.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_3"'] & Y \arrow[d, "\varphi_2"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O}(X) & \mathcal{O}(Y) \arrow[l, "\varphi_1^*"'] \\ & \mathcal{O}(Z) \arrow[u, "\varphi_2^*"'] \arrow[ul, "\varphi_3^*"] \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_3 = \varphi_2 \circ \varphi_1$, y $f \circ \varphi_3 = (f \circ \varphi_2) \circ \varphi_1$ para $f \in \mathcal{O}(Z)$.

5 Grupos algebraicos afines y acciones

En esta sección estudiaremos un tipo especial de variedad afín, que son los grupos algebraicos (afines), el objetivo de estas notas es clasificar a todos estos objetos. Para un estudio más amplio de grupos algebraicos ver [2] y [11].

Definición 5.1 *Denotamos por $\{*\}$ a la variedad afín que consiste de un sólo punto. Un grupo algebraico afín sobre el campo K es una variedad afín G junto con tres morfismos de variedades afines:*

1. multiplicación: $m : G \times G \to G$,

2. identidad: $e : \{*\} \to G$,

3. inversos $i : G \to G$,

tales que los siguientes diagramas conmutan,

1. m *es asociativa:*

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times G \arrow[r, "id\times m"] \arrow[d, "m\times id"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

2. $\{*\}$ *es la identidad:*

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\
\{*\} \times G \arrow[r, "e\times id"] \arrow[dr, "\cong"'] & G \times G \arrow[d, "m"] & G \times \{*\} \arrow[l, "id\times e"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

3. $i(a)$ *es* a^{-1}*:*

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] & \\
G \arrow[r, "(i{,}id)"'] \arrow[d] & G \times G \arrow[d, "m"] & G \arrow[l, "(id{,}i)"] \arrow[d] \\
\{*\} \arrow[r, "e"'] & G & \{*\} \arrow[l, "e"]
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 5.2 *1. El grupo aditivo* $\mathbb{G}_a = (K, +)$ *y el grupo multiplicativo* $\mathbb{G}_m = (K^*, \cdot)$ *son ambos grupos algebraicos afines.*

2. $GL_n(K)$ *es un grupo algebraico afín ya que es una variedad afín (ver ejemplo 3.8) y además es un grupo cuyas operaciones de multiplicación e inversa son morfismos de variedades afines (ver ejemplo 3.11).*

3. *Los grupos de matrices clásicos $SL_n(K)$, $U_n(K)$ y $O_n(K)$ son también grupos algebraicos afines.*

Nota 5.3 *Si G es un grupo algebraico afín, entonces el producto*

$$m : G \times G \to G$$

induce un morfismo en los anillos coordenados

$$m^* : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G \times G) \cong \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G).$$

Ahora definimos los morfismos entre grupos algebraicos afines:

Definición 5.4 *Sean $(G, m_G), (H, m_H)$ grupos algebraicos afines. Un morfismo de grupos algebraicos afines es un morfismo de variedades afines $f : G \to H$, tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "m_G"] \arrow[d, "f \times f"'] & G \arrow[d, "f"] \\ H \times H \arrow[r, "m_H"] & H, \end{tikzcd}$$

Notemos que en particular f es un homomorfismo de grupos.

Ejemplo 5.5 *La siguiente función es un morfismo de grupos algebraicos afines,*

$$\theta : \mathbb{G}_a^2 \to GL_4(K), \quad \theta(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & y \\ 0 & 1 & 2x & x^2 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 5.6 *Un subgrupo algebraico de un grupo algebraico G es una subvariedad cerrada H tal que la inclusión $H \hookrightarrow G$ es un morfismo de grupos algebraicos. Un isomorfismo de grupos algebraicos afines es un morfismo de grupos algebraicos biyectivo cuya inversa es morfismo de grupos algebraicos.*

Ejemplo 5.7 1. *La matriz identidad $\{I\}$ forma un subgrupo algebraico de $GL_n(K)$.*

2. El subgrupo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in K \right\} \subset GL_2(K)$$

es un subgrupo algebraico de $GL_2(K)$, isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{G}_a$ mediante

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{G}_a &\to GL_2(K) \\ a &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. $\mathbb{G}_m \cong GL_1(\mathbb{C})$.

Definición 5.8 *Un grupo algebraico afín isomorfo a un subgrupo cerrado de $GL_n(K)$ es llamado grupo algebraico lineal.*

Ejemplo 5.9 *Del ejemplo 5.7 el grupo aditivo $\mathbb{G}_a$ es lineal.*

El objetivo de estas notas es mostrar que cualquier grupo algebraico afín es en esencia un subgrupo de matrices, es decir, deseamos demostrar el siguiente resultado:

Teorema 6.1 *Todo grupo algebraico afín es lineal.*

Ahora estudiaremos acciones de grupos algebraicos en variedades afines. Por el resto de este escrito todas las variedades y grupos algebraicos considerados serán afines, y todos los morfismos serán de variedades afines.

Definición 5.10 *Sea G un grupo algebraico y X una variedad. Un morfismo $\sigma : G \times X \to X$ es una* acción algebraica *si hace conmutar los diagramas*

$$\begin{tikzcd} \{*\} \times X \arrow[r, "e \times id_X"] \arrow[dr, "\cong"'] & G \times X \arrow[d, "\sigma"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "id_G \times \sigma"] \arrow[d, "m_G \times id_X"'] & G \times X \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times X \arrow[r, "\sigma"'] & X. \end{tikzcd}$$

Denotamos la acción $\sigma(g, x)$ mediante $g \cdot x$. Notemos que los diagramas anteriores nos dicen que para todo $x \in X$ se cumple

$$e \cdot x = x,$$

y que para todos $g_1, g_2 \in G$

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x,$$

es decir, efectivamente es una acción de grupo en el conjunto X.

Ejemplo 5.11 *1. El grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ actúa en $\mathbb{C}^2$ mediante*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (\lambda, (a,b)) &\mapsto \lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda b). \end{aligned}$$

2. El grupo aditivo $(\mathbb{C}, +)$ actúa en la variedad $\mathbb{C}^2$ mediante

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (\lambda, (a,b)) &\mapsto \lambda \cdot (a,b) = (a, b + \lambda a). \end{aligned}$$

3. $\mathbb{C}^*$ actúa en $\mathbb{C}^2$ mediante

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (\lambda, (a,b)) &\mapsto \lambda \cdot (a,b) = (\lambda a, \lambda^{-1} b). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.12 *Si G es un grupo algebraico, entonces el producto*

$$m : G \times G \to G,$$

es una acción algebraica de G en G, que induce un morfismo en los anillos coordenados,

$$\begin{aligned} m^* : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G \times G) &\cong \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G), \\ f &\mapsto \sum_{i,\, j} a_i \otimes a_j \end{aligned}$$

con $a_i \in \mathcal{O}(G)$.

Definición 5.13 *Dada una acción de un grupo algebraico G en una variedad X decimos que un subconjunto $Z \subset X$ es G-invariante si*

$$g \cdot x \in Z,$$

para todo $x \in Z$ y todo $g \in G$, es decir, si $GZ \subset Z$.

Ejemplo 5.14

1. *El origen $\{(0,0)\}$ es un conjunto $\mathbb{C}^*$-invariante de la acción $\sigma(\lambda,(a,b)) = (\lambda a, \lambda b)$ definida en el ejemplo 5.11.*

2. *Los subconjuntos de la forma*

$$\{(a,0)|a \in \mathbb{C}\} \text{ y } \{(0,b)|b \in \mathbb{C}\},$$

son $\mathbb{C}^*$-invariantes bajo la acción $\sigma(\lambda,(a,b)) = (\lambda a, \lambda^{-1} b)$ dada en el ejemplo 5.11.

Nota 5.15 *Una acción algebraica de G en X induce una acción (derecha) en el anillo $\mathcal{O}(X)$ mediante*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{O}(X) \times G &\to \mathcal{O}(X) \\ (f(x), g) &\mapsto g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x) \end{aligned}$$

la cual define un morfismo de grupos

$$\begin{aligned} G &\to Aut(\mathcal{O}(X)) \\ g &\mapsto \varphi_g \end{aligned}$$

donde φ_g es la función

$$\begin{aligned} \varphi_g : \mathcal{O}(X) &\to \mathcal{O}(X) \\ f(x) &\mapsto f(g^{-1} \cdot x). \end{aligned}$$

Además, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de variedades y su respectivo diagrama conmutativo en sus anillos coordenados

$$\begin{tikzcd} X & G \times X \arrow[l, "\sigma"'] \\ & X \arrow[ul, "\sigma_g"] \arrow[u, "{(g,id_X)}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{O}(X) \arrow[r, "\sigma^*"] \arrow[dr, "\varphi_g"'] & \mathcal{O}(G) \otimes_K \mathcal{O}(X) \arrow[d, "\psi_g"] \\ & \mathcal{O}(X), \end{tikzcd}$$

donde $\sigma_g(x) = g \cdot x$ para cada $x \in X$ y

$$\psi_g(h \otimes f) = h(g)f,$$

para $h \in \mathcal{O}(G)$ y $f \in \mathcal{O}(X)$.

6 Clasificación de grupos algebraicos afines

En esta sección demostramos uno de los más importantes resultados de la teoría de grupos algebraicos, que enuncia que todo grupo algebraico afín es en esencia un subgrupo de matrices, concretamente:

Teorema 6.1 *Todo grupo algebraico afín es lineal.*

Notemos que este resultado clasifica a todos los grupos algebraicos afines, en el sentido de que todos ellos son isomorfos a subgrupos de $GL_n(K)$, así que para entender a los grupos afines es suficiente entender las matrices y sus subgrupos. En general, el intentar clasificar grupos infinitos es sumamente complicado, sin embargo este resultado nos dice que si agregamos la hipótesis geométrica de que nuestros grupos sean también algebraicos, tenemos la respuesta completa de su clasificación, esto es una muestra de la herramienta tan fuerte que obtenemos al combinar el álgebra y la geometría.
Desarrollaremos por partes la demostración de este teorema, iniciando por el siguiente:

Lema 6.2 *Sea G un grupo algebraico actuando en una variedad afín X. Entonces para cada $f \in \mathcal{O}(X)$ existe un subespacio vectorial $V \subset \mathcal{O}(X)$ que satisface las siguientes propiedades:*

i *$f \in V$;*

ii *$dim_K(V) < \infty$;*

iii *V es G-invariante.*

Demostración. La demostración es constructiva, proponemos un subespacio V de dimensión finita y veremos que cumple las propiedades:

Paso 1) Construir V. Sea $f \in \mathcal{O}(X)$. Recordemos que del diccionario álgebra-geometría, una acción

$$\sigma : G \times X \to X,$$

induce una función en los anillos coordenados

$$\sigma^* : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(G \times X) \cong \mathcal{O}(G) \otimes_K \mathcal{O}(X),$$

por lo que, si $\{h_i\} \subset \mathcal{O}(G)$ y $\{f_i\} \subset \mathcal{O}(X)$ son generadores, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sigma^* : \mathcal{O}(X) &\to \mathcal{O}(G \times X) \cong \mathcal{O}(G) \otimes_K \mathcal{O}(X) \\ f &\mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i \otimes f_i. \end{aligned}$$

Consideramos el espacio vectorial generado

$$V = Span\{f_1, \ldots, f_n\}.$$

Paso 2) $f \in V$. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo, para cada $g \in G$ (ver observación 5.15)

$$\begin{tikzcd} X & G \times X \arrow[l, "\sigma"'] \\ & X \arrow[u, "(g{,}id_X)"'] \arrow[ul, "\sigma_g"] \end{tikzcd}$$

que induce a su vez un diagrama conmutativo en los anillos de coordenadas

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(X) \arrow[r, "\sigma^*"] \arrow[dr, "\varphi_g"'] & \mathcal{O}(G) \otimes_K \mathcal{O}(X) \arrow[d, "\psi_g"] \\ & \mathcal{O}(X). \end{tikzcd}$$

De este modo,

$$g \cdot f = \psi_g(\sigma^*(f)) = \psi_g(\sum h_i \otimes f_i) = \sum h_i(g) f_i,$$

y si $g = e$ se tiene que $e \cdot f = f$. Entonces V es un subespacio vectorial que contiene a f.

Paso 3) V es G-invariante. Basta ver que para cada $f_1, \ldots, f_n$ se cumple $g \cdot f_i \in V$ para todo $g \in G$, es decir, es suficiente ver que

$$f_i = g_i \cdot f,$$

para algún $g_i \in G$, o bien,

$$f_i = \sum_j h_j(g_i) f_j.$$

Como para cada i existe un $g_i \in G$ tal que

$$g_i \cdot f = \sum_j h_j(g_i) f_j = f_i,$$

esto significa que $h_i(g_i) = 1$, $h_j(g_i) = 0$ para $i \neq j$ entonces $f_i = g_i \cdot f$. Para todo $g \in G$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} g \cdot f_i &= g \cdot (g_i \cdot f) \\ &= (gg_i) \cdot f \\ &= \sum_j h_j(gg_i) f_j \in V. \end{aligned}$$

Por lo tanto V es G-invariante.

□

Proposición 6.3 *Si $W \subset \mathcal{O}(X)$ es un subespacio vectorial de dimensión finita, entonces existe un subespacio vectorial G-invariante $V \subset \mathcal{O}(X)$ de dimensión finita, tal que $W \subset V$.*

Demostración. Sea $\{w_1, \ldots, w_s\}$ una base de W. Entonces por el lema anterior, para cada w_i existe un subespacio vectorial V_i que es de dimensión finita y G-invariante, con $w_i \in V_i$. Definimos

$$V = Span\{V_1, \ldots, V_s\},$$

claramente V es G-invariante y contiene a W. □

Finalmente estamos listos para demostrar la clasificación de grupos algebraicos afines:

Demostración. [del teorema 6.1] Dividimos esta demostración en una serie de pasos:

Paso 1) el subespacio V. Sea G un grupo algebraico afín, entonces $\mathcal{O}(G)$ es una K-álgebra de la forma

$$\mathcal{O}(G) \cong K[x_1, \ldots, x_s]/I(G) = K[g_1, \ldots, g_s].$$

Sea W el subespacio generado por los generadores de $\mathcal{O}(G)$,

$$W = Span\{g_1, \ldots, g_s\}.$$

Por el lema anterior existe un subespacio V, G-invariante con $W \subset V$. Sea $\{f_1, \ldots, f_n\}$ una base de V.

Paso 2) el morfismo inducido por el producto. Recordemos que el producto

$$m : G \times G \to G$$

es una acción de G en G e induce un morfismo en los anillos coordenados. Así para cada $f_i \in V$ tenemos

$$m^* : \mathcal{O}(G) \to \mathcal{O}(G \times G) \cong \mathcal{O}(G) \otimes_K \mathcal{O}(G),$$
$$f_i \mapsto \sum_j a_{ij} \otimes f_j$$

con $a_{ij}, f_j \in \mathcal{O}(G)$. Además, para cada $g \in G$ se tiene el diagrama conmutativo (ver ejemplo 5.12)

$$\begin{tikzcd} G & & G \times G \arrow[ll, "m"'] \\ & & G \arrow[u, "(g,id_G)"'] \arrow[ull, "m_g"] \end{tikzcd}$$

que induce el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(G) \arrow[rr, "m^*"] \arrow[drr, "\varphi_g"'] & & \mathcal{O}(G) \otimes_K \mathcal{O}(G) \arrow[d, "\psi_g"] \\ & & \mathcal{O}(G). \end{tikzcd}$$

Por lo que

$$g \cdot f_i = \psi_g(m^*(f_i)) = \psi_g(\sum_j a_{ij} \otimes f_j) = \sum_j a_{ij}(g) f_j.$$

Como V es G-invariante, $g \cdot f_i \in V$ para cada $g \in G$, así podemos expresar a cada f_i como

$$f_i = \sum_j a_{ij}(e) f_j.$$

Paso 3) el morfismo ρ. Sea $n = dim_K(V)$ y consideremos la variedad afín de matrices cuadradas

$$M = M_{n \times n}(K),$$

donde $\mathcal{O}(M) = K[x_{ij}]$. Considerando las funciones $a_{ij} \in \mathcal{O}(G)$ que aparecen en el paso anterior, definimos el homomorfismo de anillos dado en los generadores como

$$\begin{aligned}\rho^* : \mathcal{O}(M) &\to \mathcal{O}(G)\\ x_{ij} &\mapsto a_{ij},\end{aligned}$$

Por el diccionario álgebra-geometría, ρ^* induce un morfismo de variedades afines

$$\rho : G \to M.$$

Paso 4) ρ es inyectivo. Debido a que el diccionario álgebra-geometría intercambia sobreyectividad e inyectividad, entonces para mostrar la inyectividad de ρ, mostraremos la sobreyectividad de ρ^*. Notemos que es suficiente demostrar que cada elemento f_i en la base de V satisface

$$f_i \in Im(\rho^*),$$

ya que los generadores de $\mathcal{O}(G)$ están en W que a su vez están contenidos en V

$$\{g_1, ...g_s\} \subset W \subset V.$$

Consideramos ahora el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} G & G \times G \arrow[l, "m"'] \\ & G \arrow[ul, "id_G"] \arrow[u, "id_G \times e"'] \end{tikzcd}$$

y su diagrama inducido

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(G) \arrow[r, "m^*"] \arrow[dr, "id_{\mathcal{O}(G)}"'] & \mathcal{O}(G) \otimes_K \mathcal{O}(G) \arrow[d, "id_{\mathcal{O}(G)} \otimes_K e^*"] \\ & \mathcal{O}(G). \end{tikzcd}$$

Así, para cada $f_i \in V \subset \mathcal{O}(G)$, de la conmutatividad del diagrama se sigue que

$$f_i = (id_{\mathcal{O}(G)} \otimes_K e^*)(m^*(f_i)) = (id_{\mathcal{O}(G)} \otimes_K e^*)(\textstyle\sum_j a_{ij} \otimes f_j) = \sum_j a_{ij} e^*(f_j),$$

donde $e : \{*\} \to G$ es el morfismo que define a la identidad y

$$e^* : \mathcal{O}(G) \to K,$$

es su morfismo inducido. Por lo anterior, para cada $f_i \in V$ existe el elemento

$$\sum_j e^*(f_j)x_{ij} \in \mathcal{O}(M),$$

que satisface

$$\rho^*(\sum_j e^*(f_j)x_{ij}) = f_i,$$

se sigue que ρ^* es sobreyectiva, y por el corolario 4.5 la imagen $Im(\rho)$ es una subvariedad cerrada de las matrices cuadradas M.

Paso 5) $Im(\rho)$ **preserva productos.** En el paso anterior concluimos que $Im(\rho)$ es una subvariedad de las matrices cuadradas, ahora veamos que esta imagen consiste de matrices invertibles. Veamos primero que ρ preserva productos, es decir, que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M & & & M \times M \arrow[lll, "m_M"'] \\
& \rho(ab) = \rho(a)\rho(b) & (\rho(a), \rho(b)) \arrow[l] & \\
& ab \arrow[u] & (a,b) \arrow[l] \arrow[u] & \\
G \arrow[uuu, "\rho"] & & & G \times G \arrow[lll, "m_G"] \arrow[uuu, "\rho\times\rho"']
\end{tikzcd}$$

Equivalentemente, es suficiente mostrar que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(M) \arrow[rrr, "m_M^*"] \arrow[ddd, "\rho^*"'] & & & \mathcal{O}(M) \otimes_K \mathcal{O}(M) \arrow[ddd, "\rho^* \otimes_K \rho^*"] \\
& x_{ij} \arrow[r] \arrow[d] & \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj} \arrow[d] & \\
& a_{ij} \arrow[r] & \sum_k a_{ik} \otimes a_{kj} & \\
\mathcal{O}(G) \arrow[rrr, "m_G^*"'] & & & \mathcal{O}(G) \otimes_K \mathcal{O}(G)
\end{tikzcd}$$

Notemos que la composición es

$$\begin{aligned} m_G^*(a_{ij}) &= m_G^*(\rho^*(x_{ij})) = (\rho^* \otimes_K \rho^*)(\sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}) \\ &= (\rho^* \otimes_K \rho^*)(m_M^*(x_{ij})) = \sum_k a_{ik} \otimes a_{kj}. \end{aligned}$$

Como este diagrama es conmutativo entonces ρ preserva productos.

Paso 6) $\rho(e) = I_n$. Ahora mostraremos que la matriz identidad I_n está en la imagen de ρ y además se satisface $\rho(e) = I_n$. Del paso 2,

$$g \cdot f_i = \sum_j a_{ij}(g) f_j,$$

y cuando $g = e$ se tiene que

$$f_i = \sum_j a_{ij}(e) f_j,$$

como los $\{f_i\}$ son linealmente independientes, se sigue que,

$$a_{ij}(e) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Por lo que $I_n \in Im(\rho)$ y existe un $c \in G$ tal que $I_n = \rho(c)$. Sea $a \in G$, como ρ preserva productos,

$$\rho(ac) = \rho(a)\rho(c) = \rho(a) = \rho(c)\rho(a) = \rho(ca),$$

y como ρ es inyectivo, se debe tener

$$ac = a = ca,$$

entonces c cumple la propiedad de ser la identidad de G, por lo que $c = e$, y $I_n = \rho(e)$.

Paso 7) $Im(\rho)$ es una subvariedad de $GL_n(K)$. Sean $a, b \in G$ tales que $ab = e = ba$. Entonces

$$\begin{aligned} I_n &= \rho(ab) = \rho(a)\rho(b), \\ I_n &= \rho(ba) = \rho(b)\rho(a), \end{aligned}$$

y $\rho(b)$ es la matriz inversa de $\rho(a)$, así

$$Im(\rho) \subset GL_n(K),$$

por lo que ρ es un isomorfismo entre G y un subgrupo cerrado de $GL_n(K)$, es decir, G es un grupo algebraico lineal. $\square$

Los grupos algebraicos lineales ocupan un lugar central en la interacción entre álgebra y geometría, proporcionando una poderosa herramienta para entender tanto la estructura interna de los grupos como su acción sobre variedades algebraicas (ver por ejemplo [9]). La clasificación de grupos algebraicos afines resalta la profunda conexión que existe entre la geometría algebraica y la teoría de matrices.

7 Algunas palabras sobre la GIT

La Teoría de Invariantes Geométricos (GIT), desarrollada por David Mumford y por la cual mereció la Medalla Fields en 1974, es fundamental para el estudio de los espacios moduli en geometría algebraica, ya que proporciona las herramientas necesarias para clasificar y parametrizar objetos geométricos a través de sus simetrías mediante acciones de grupos algebraicos. Un espacio moduli representa un conjunto de objetos geométricos (como curvas algebraicas, foliaciones, superficies o haces vectoriales) que se consideran equivalentes bajo ciertas transformaciones o isomorfismos. La descripción precisa de estos espacios requiere un entendimiento profundo de cómo los grupos algebraicos actúan sobre las variedades y de los invariantes que surgen de estas acciones. En este sentido, los invariantes geométricos permiten simplificar la complejidad de un problema, reduciéndolo a estudiar las propiedades que permanecen inalteradas bajo la acción de un grupo. Por ejemplo, los espacios moduli de curvas algebraicas, de foliaciones algebraicas, de haces vectoriales en superficies algebraicas, se construyen utilizando invariantes geométricos asociados a las acciones de grupos. Para una introducción a la teoría de invariantes geométricos se recomienda al lector [4, 7, 8, 10] y [11].
La teoría de invariantes geométricos no solo ayuda a clasificar objetos en geometría algebraica, sino que también permite construir y comprender la estructura interna de los espacios moduli. Esto ha tenido aplicaciones profundas no solo en matemáticas, sino también en física teórica, donde los espacios moduli juegan un papel central en teorías de campos y cuerdas.

Graciela Reyes-Ahumada
SECIHTI - ITCM,
grace@cimat.mx

Juan Vásquez Aquino
Unidad Académica de Matemáticas
UAZ,
juan.vasquez@cimat.mx

Kenia Zarate Badillo
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.,
kenia.zarate@cimat.mx

Referencias

[1] Atiyah, M.F., Macdonald L.G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company (1969).

[2] Borel A., *Linear algebraic groups*, 126 (1985), Springer Science & Business Media (2012).

[3] Cox D.A, Little J., O'Shea D, *Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Springer (2007).

[4] Dolgachev I., *Lectures on invariant theory*, Cambridge University Press, 296 (2003).

[5] Fulton W., Weiss R., *Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry*, Addison-Wesley Redwood City California., 3 (1989).

[6] Mac Lane S., *Categories for the working mathematician*, 2, Springer New York, NY (1998).

[7] Mumford, D., Kirwan, F., Fogarty J., *Geometric invariant theory*, Springer Verlag (1994).

[8] Newstead P.E., *Introduction to moduli problems and orbit Spaces*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1978).

[9] Reyes-Ahumada G., Vásquez Aquino J., Zarate Badillo K., *Estudio GIT de la conjugación de matrices*, Miscelánea Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana, 79 (2024), 23-39. Doi:10.47234/MM.7904

[10] Reynoso Alcántara C., *Introducción a la teoría de invariantes geométricos*, Notas de curso (2010).

[11] Santos W. F., Rittatore A., *Actions and invariants of algebraic groups*, CRC Press (2005).

[12] Shafarevich I. R., *Basic algebraic geometry 1*, Springer (2013).

[13] Zarate Badillo K., *Clasificación de grupos algebraicos afines y estudio GIT de la conjugación de matrices*, Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de Zacatecas (2023).